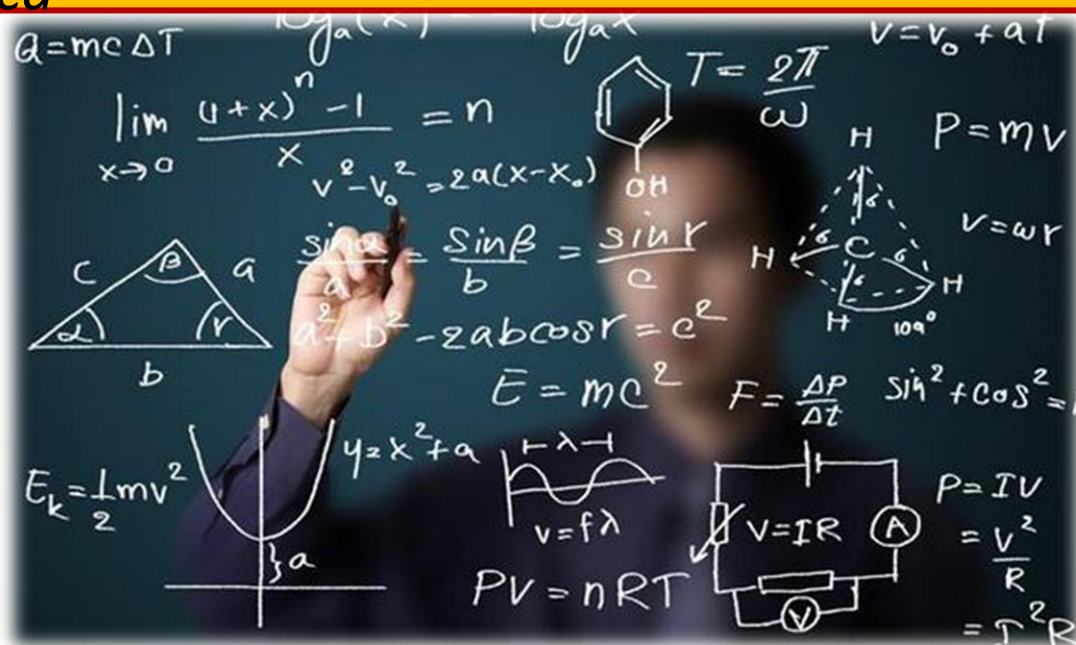




M. Αγγελακέρης

Η Τέχνη και οι Τεχνικές μιας Επιστημονικής Αναφοράς

Από μια Αναλυτική Αναφορά Δεδομένων μέχρι
μια Ολοκληρωμένη Επιστημονική Παρουσίαση

Κεφάλαιο 7 Υπολογισμοί

```
In[157]:= Solve[x^2 + ax + 1 == 0, x]
```

```
Out[157]:= {{x -> -sqrt(-1 - ax)}, {x -> sqrt(-1 - ax)}}
```

```
In[158]:= Mod[{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, 3]
```

```
Out[158]:= {1, 2, 0, 1, 2, 0, 1}
```

```
In[159]:= 1 / 0
```

```
Power::infy : Infinite expression 1/0 encountered
```

```
Out[159]:= ComplexInfinity
```

Ομάδα Γ.

Ο υπολογιστής ως επιστημονικό εργαλείο

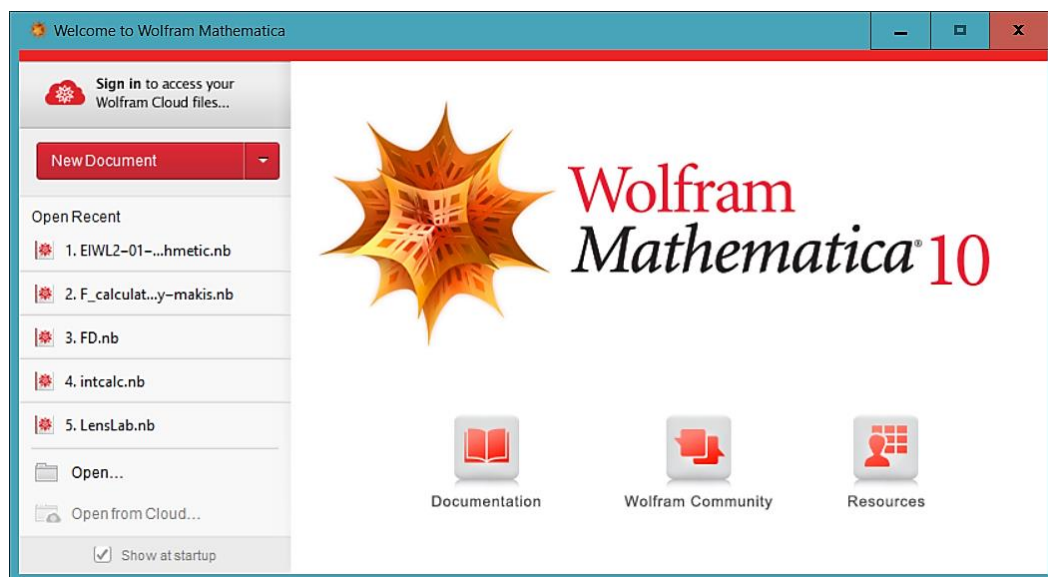
Εργασία-7: Απλοί υπολογισμοί με Mathematica



Wolfram
Mathematica®



Για τρεις δεκαετίες, η Mathematica έχει καθορίσει την κατάσταση της τεχνολογίας στον τομέα της εφαρμοσμένης πληροφορικής και παρέχει το κύριο περιβάλλον υπολογισμού για εκατομμύρια επιστήμονες, ερευνητές, εκπαιδευτικούς, φοιτητές σε όλο τον κόσμο.



Η Mathematica παρέχει ένα ενιαίο ολοκληρωμένο σύστημα με τεχνική ικανότητα όσο και εύχρηστη λειτουργία, που καλύπτει το φάσμα της εφαρμοσμένης πληροφορικής, ενώ το Mathematica Online, είναι πλέον διαθέσιμο (Cloud) μέσω οποιουδήποτε προγράμματος περιήγησης, καθώς και σε όλα τα σύγχρονα συστήματα επιτραπέζιων υπολογιστών.

Η Mathematica διαθέτει σχεδόν 5.000 ενσωματωμένες λειτουργίες που καλύπτουν όλους τους τομείς της εφαρμοσμένης πληροφορικής - όλα προσεκτικά ενσωματωμένα έτσι ώστε να συνεργάζονται τέλεια και όλα αυτά ενσωματώνονται στο πλήρες πακέτο.

[Quick Tour of Mathematica](#) ENG Video: 02 min



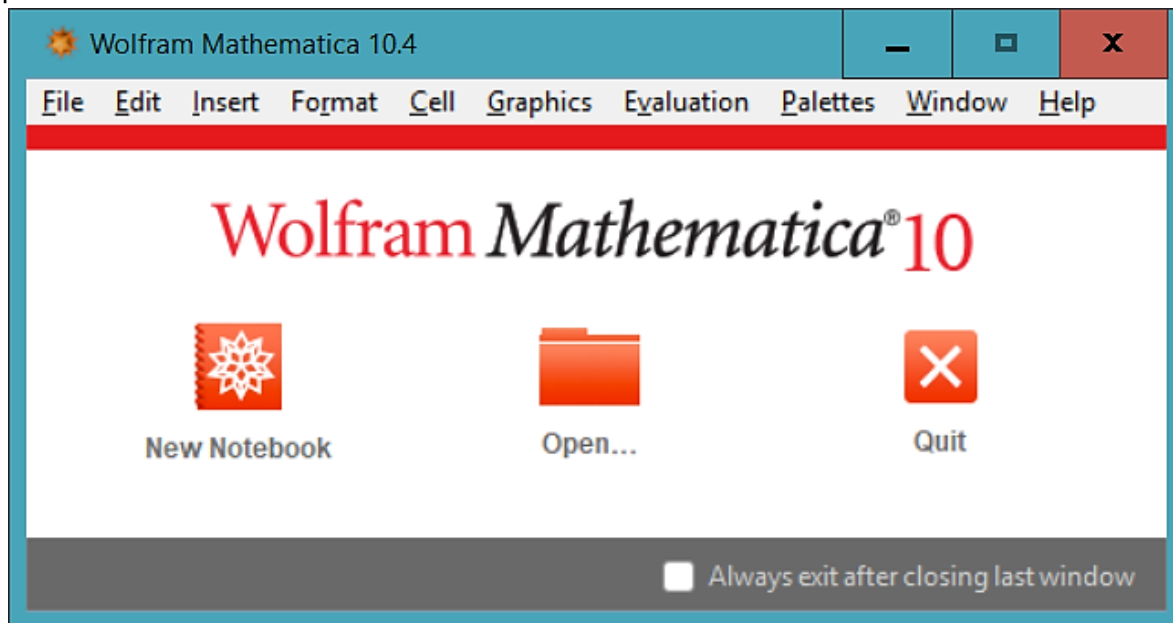
Επίσημη ιστοσελίδα

[Hands-on Start to Mathematica](#) ENG Video: 35 min

- ❑ Η Mathematica βασίζεται σε ισχυρούς αλγόριθμους από διαφορετικές θεματικές περιοχές - πολλοί από τους οποίους δημιουργήθηκαν χρησιμοποιώντας πρωτότυπες μεθοδολογίες ανάπτυξης και δυνατότητες της γλώσσας Wolfram.
- ❑ Η Mathematica είναι κατασκευασμένη για να παρέχει δυνατότητες βιομηχανικής κλίμακας - με ισχυρούς, αποτελεσματικούς αλγορίθμους, ικανή να χειρίζεται μεγάλης κλίμακας προβλήματα, παράλληλη επεξεργασία, GPU computing (General-purpose computing on graphics processing units).
- ❑ Η Mathematica στηρίζεται στην αλγοριθμική της ισχύ - καθώς και στον προσεκτικό σχεδιασμό της γλώσσας Wolfram - για να δημιουργήσει ένα σύστημα που είναι μοναδικά εύκολο στη χρήση, με προβλέψιμες προτάσεις, εισαγωγή φυσικής γλώσσας.
- ❑ Η Mathematica χρησιμοποιεί το interface Wolfram Notebook Interface, το οποίο σας επιτρέπει να οργανώσετε ότι κάνετε σε πλούσια έγγραφα που περιλαμβάνουν κείμενο, κώδικα με δυνατότητα εκτέλεσης, δυναμικά γραφικά, διεπαφές χρήστη.
- ❑ Ξεκινώντας από οποιαδήποτε εργασία με βοήθεια από 150.000+ παραδείγματα στο Κέντρο τεκμηρίωσης, πάνω από 10.000 ανοικτού κώδικα επίδειξη στο Πρόγραμμα Wolfram επίδειξης - και πλήθος άλλων πόρων.
- ❑ Η Mathematica έχει σχεδιαστεί για να συνδέεται με τα πάντα: μορφές αρχείων (180+), άλλες γλώσσες, Wolfram Data Drop, APIs, βάσεις δεδομένων, προγράμματα, το Διαδίκτυο των Πράξεων, συσκευές.



1 Βασικά Χαρακτηριστικά

[Επίσημη ιστοσελίδα](#)[A Student's Introduction to Mathematica](#) Video: 16 min

```
In[16]:= Solve[x^7 - 1 == 0, x]
```

```
Out[16]= {{x -> 1}, {x -> -(-1)^(1/7)}, {x -> (-1)^(2/7)},  
          {x -> -(-1)^(3/7)}, {x -> (-1)^(4/7)},  
          {x -> -(-1)^(5/7)}, {x -> (-1)^(6/7)}}
```

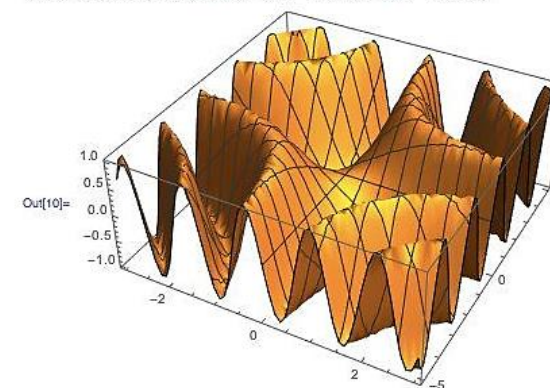
```
In[17]:= Solve[Sqrt[x^3] == 2, x]
```

```
Out[17]= {{x -> (-2)^(2/3)}, {x -> 2^(2/3)}, {x -> -(-1)^(1/3) 2^(2/3)}}
```

```
In[18]:= Solve[(x^3 - 1) / (x^2 + 1) == 0, x]
```

```
Out[18]= {{x -> 1}, {x -> -(-1)^(1/3)}, {x -> (-1)^(2/3)}}
```

```
In[10]:= Plot3D[Sin[x*y], {x, -3, 3}, {y, -5, 5}]
```



Με δύο λόγια, μπορούμε να πούμε ότι η Mathematica είναι ένα πρόγραμμα που το χρησιμοποιούμε για να κάνουμε αναλυτικούς και αριθμητικούς υπολογισμούς αλλά και γραφικά, με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή, συνεπώς είναι ένα ανεκτίμητο εργαλείο για κάθε έναν που κάνει τακτικά πολύπλοκους μαθηματικούς υπολογισμούς.

Το βασικό πλεονέκτημα του προγράμματος είναι ότι δίνει τη δυνατότητα και σε κάποιον που δεν γνωρίζει προγραμματισμό, να παράγει εντυπωσιακά αποτελέσματα, με λίγες εντολές που είναι πολύ λογικές μια και ακολουθούν τρόπο που σκεπτόμαστε.

Αντίθετα το βασικό «μειονέκτημα» του προγράμματος, όταν κάποιος ξεκινά να δουλεύει με αυτό, είναι ότι περιέχει χιλιάδες εντολές –σημαντικές- που ο νέος χρήστης νομίζει ότι πρέπει να μάθει πριν ξεκινήσει.

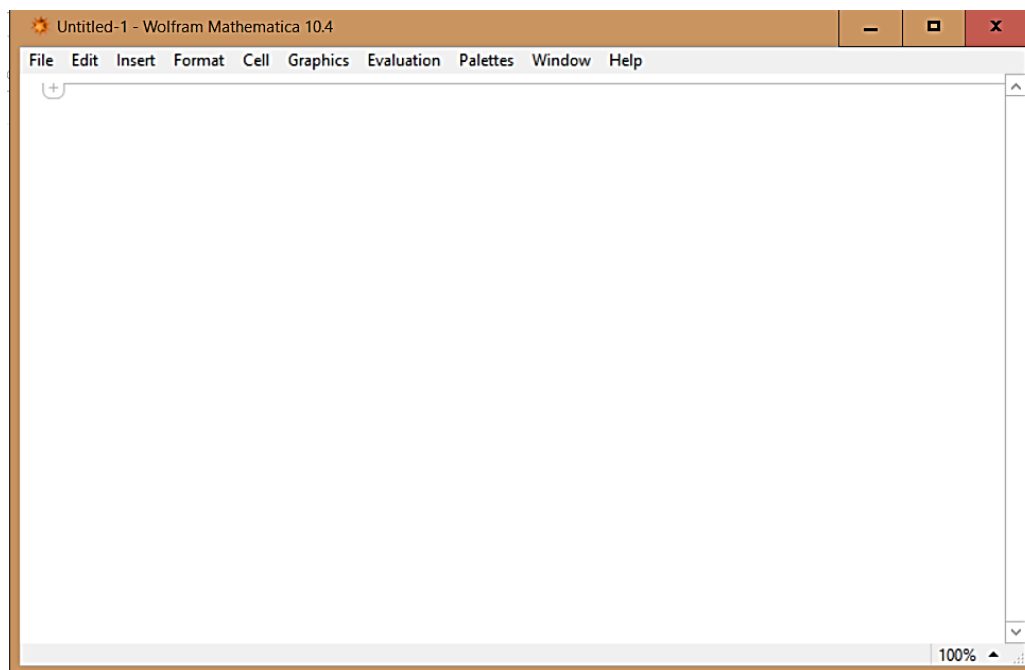


1 | Βασικά Χαρακτηριστικά

το πακέτο αποτελείται από δύο μέρη.

τον πυρήνα (Kernel) ο οποίος περιέχει τον κώδικα επεξεργασίας των εντολών και

το σημειωματάριο (Notebook interface) μέσα από το οποίο επικοινωνεί ο χρήστης με τον πυρήνα.



Μόλις ξεκινά το πρόγραμμα, ο χρήστης έχει μπροστά του ένα άδειο σημειωματάριο στο οποίο μπορεί εισάγει μία εντολή ή ένα σύνολο από εντολές (μετά το `In[1]:=...`).

Πατώντας **SHIFT + ENTER** (ή απλό **ENTER** από το αριθμητικό πληκτρολόγιο) οι εντολές αυτές στέλνονται στον πυρήνα ο οποίος τις εκτελεί μία-μία με τη σειρά και στέλνει τα αποτελέσματα ξανά πίσω στο σημειωματάριο (μετά το `Out[1]:=...`).

με απλό **ENTER** απλώς πάμε στην επόμενη γραμμή, από όπου μπορούμε αν θέλουμε να γράψουμε νέα εντολή.

```
In[16]:= (5 + 4 - 1.5) ^ 2 - 2 * (3 - 1)
```

```
Out[16]= 52.25
```

```
In[17]:= 2.4 ^ 3 / 8.9 ^ 2
```

```
Out[17]= 0.174523
```

```
In[18]:= Round[3.1234]
```

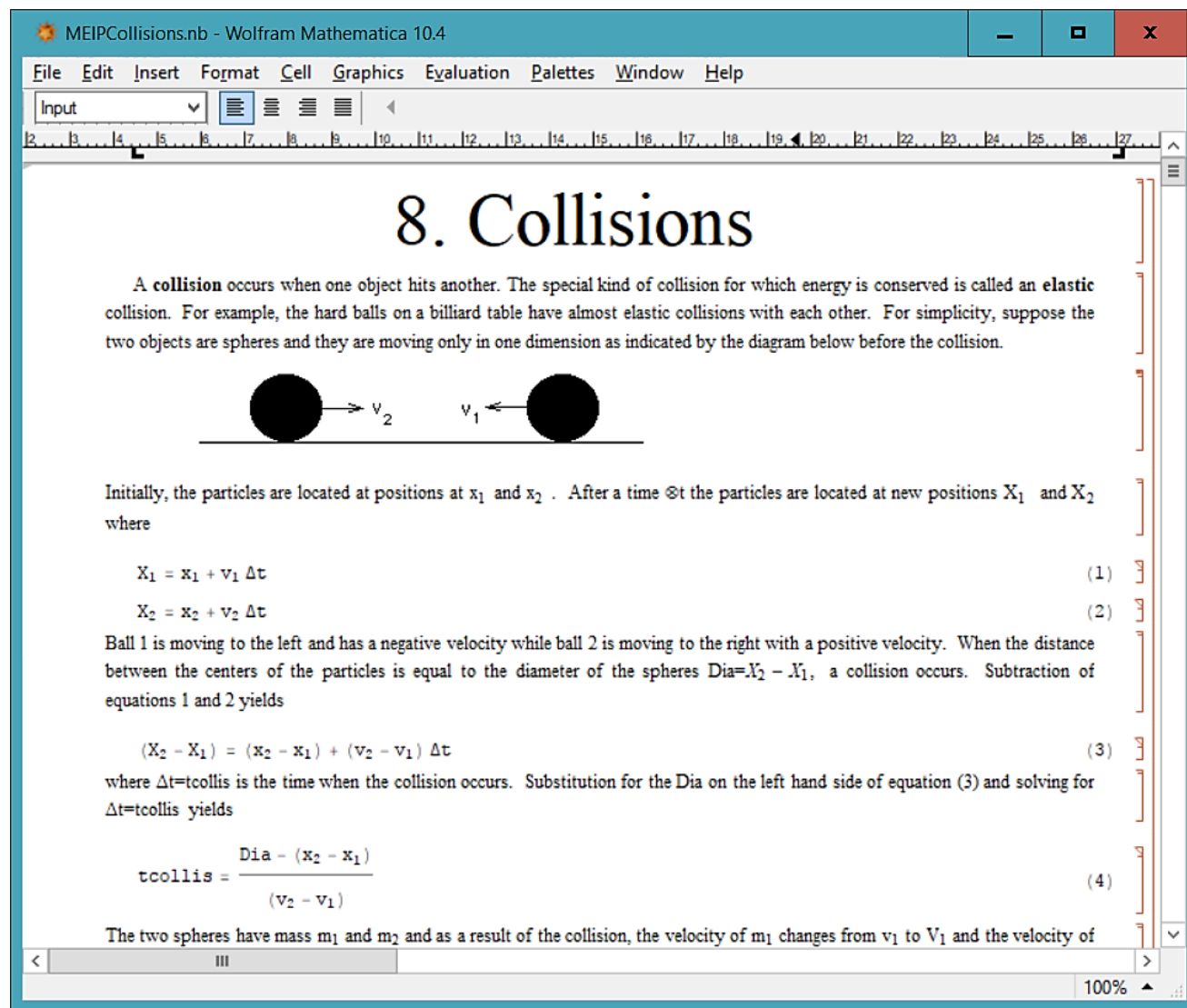
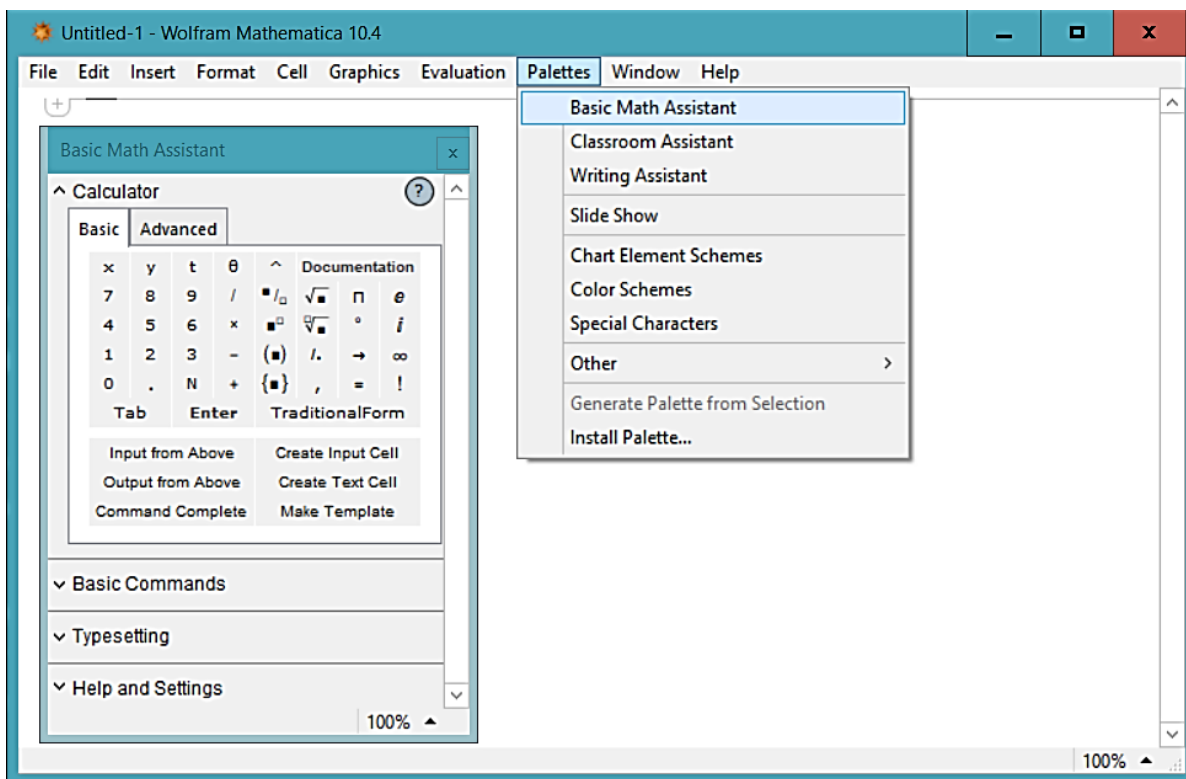
```
Out[18]= 3
```

```
In[20]:= ArcCos[Sqrt[3] / 2]
```

```
Out[20]=  $\frac{\pi}{6}$ 
```



1 Βασικά Χαρακτηριστικά



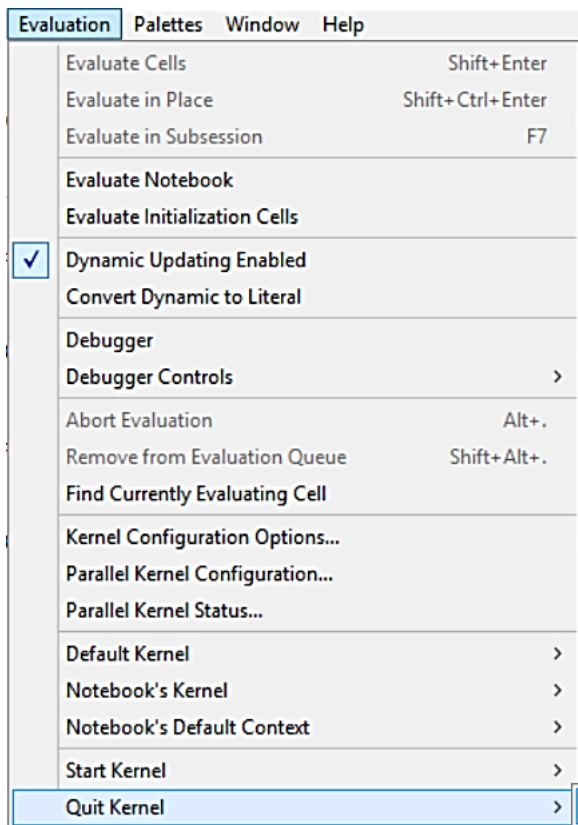


1 Βασικά Χαρακτηριστικά

Εκκίνηση - Διακοπή υπολογισμών

Αρχικά ο πυρήνας δεν είναι ενεργοποιημένος αλλά ενεργοποιείται την πρώτη φορά που θα εκτελέσουμε κάποια εντολή.

Εάν υπάρχει κάτι μη αποδεκτό από τη **Mathematica** στο **In**, τότε στο **Out** εμφανίζεται κάποιο προειδοποιητικό μήνυμα.

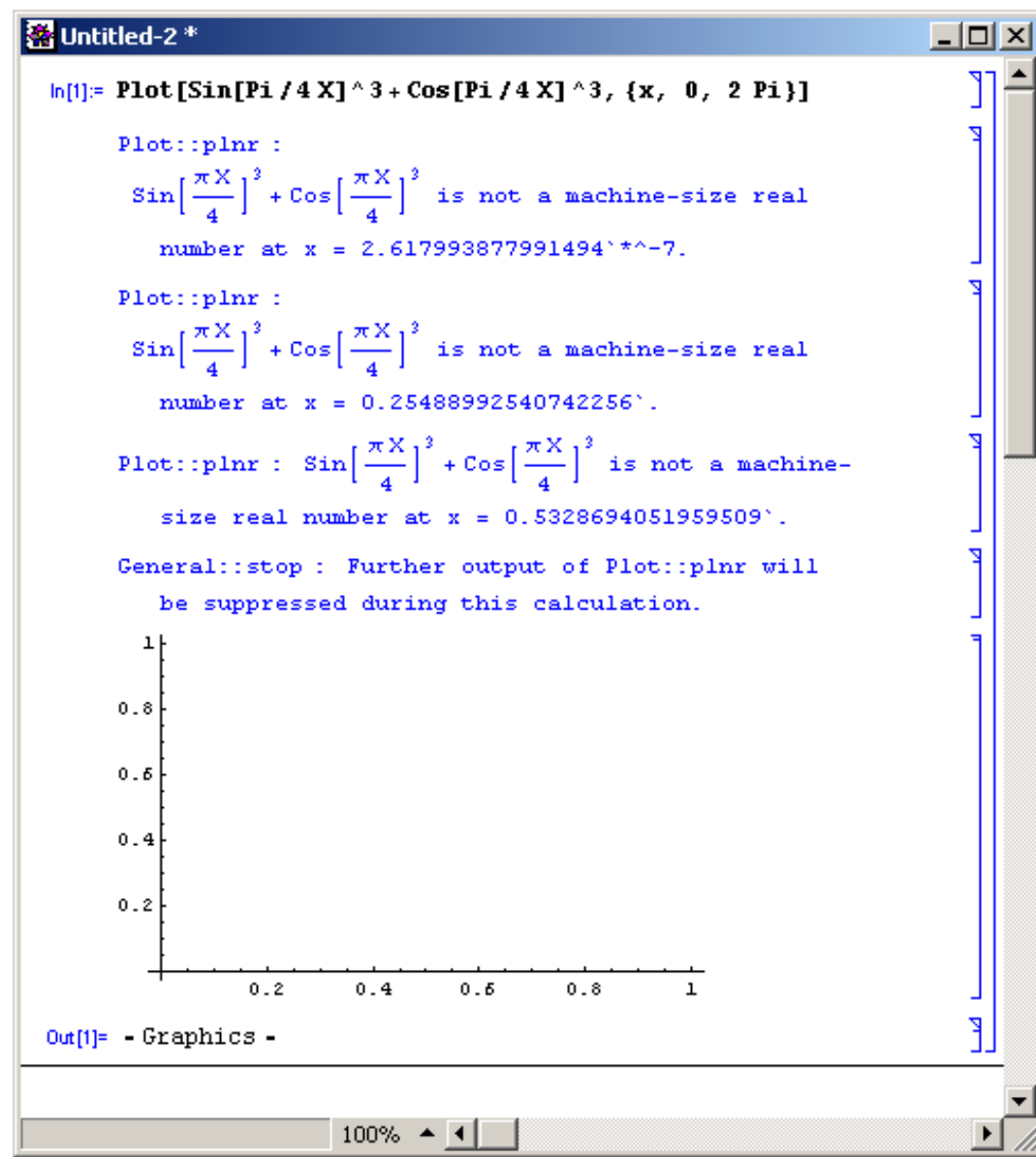


Μέσα από το Menu Evaluation μπορούμε να ρυθμίσουμε τη διαδικασία υπολογισμού.

Μπορώ να εκτελέσω υπολογισμούς ολόκληρου του σημειωματρίου: Evaluate Notebook, συγκεκριμένων κελιών: Evaluate Cells.

Επίσης μπορώ να σταματήσω τον πυρήνα: Quit Kernel ή να τον επανεκκινήσω χειροκίνητα: Start Kernel.

Κάθε φορά που ξεκινάει ο πυρήνας, ξεκινάει και η αρίθμηση εντολών από την τιμή 1.





1 | Βασικά Χαρακτηριστικά

Χρησιμοποιώντας λίγη βοήθεια

Η Mathematica περιλαμβάνει λοιπόν, έναν μεγάλο αριθμό εσωτερικών συναρτήσεων και έτοιμων υποπρογραμμάτων που είναι ενσωματωμένα σε μια ευέλικτη γλώσσα προγραμματισμού.

Κάθε μία από το πλήθος αυτό των υποπρογραμμάτων και ενσωματωμένων συναρτήσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε αυτόνομα, οπότε ο χρήστης πληκτρολογεί την εντολή και παίρνει άμεσα την απάντηση, είτε να ενσωματωθεί στα πλαίσια προγραμμάτων στο περιβάλλον της Mathematica, που εκτελούν μαζικά σειρά εντολών.

Η Mathematica έχει την δυνατότητα να πραγματοποιεί (μέσα από εκατοντάδες συναρτήσεις - functions) κυρίως τρεις κατηγορίες εντολών:

Αριθμητικούς υπολογισμούς: `5+7` `3^100` `N[Pi^2, 50]`

Συμβολικό λογισμό: `Integrate[x^4/(x^2-1), x]`

Γραφικές παραστάσεις: `Plot[Sin[x], {x,0,2*Pi}]`

Τι κάνει η εντολή **FactorInteger**;

The screenshot shows the Wolfram Mathematica 10.4 interface. The 'Help' menu is open, and 'Find Selected Function' (F1) is highlighted. The documentation for the **FactorInteger** function is displayed. The function is described as giving a list of the prime factors of the integer n , together with their exponents. The documentation also shows the usage `FactorInteger[n, k]` for partial factorization, pulling out at most k distinct factors. Below the documentation, there are sections for 'Details and Options', 'Examples' (13), 'See Also' (listing `PrimeNu`, `PrimeOmega`, `IntegerExponent`, `Prime`, `PrimeQ`, `PrimePowerQ`, `SquareFreeQ`, and `Divisors`), 'Tutorials', 'Related Guides', and 'Related Links'. The bottom of the window shows the version information: 'Introduced in 1988 (1.0) | Updated in 2007 (6.0)'.



1 Βοήθεια ανά θεματική περιοχή

Χρησιμοποιώντας λίγη βοήθεια

Η βοήθεια της Mathematica ανοίγει είτε με το πλήκτρο F1, είτε επιλέγοντας Help από τη γραμμή εργαλείων.

Η πρώτη επιλογή είναι: Wolfram Documentation όπου δίνεται η δυνατότητα επιλογής βοήθειας ανά θεματική περιοχή.

Κάθε θεματική περιοχή έχει ένα σύνολο εντολών που σχετίζονται με τον τίτλο της, ενώ υπάρχουν θεματικές περιοχές γενικής χρήσης και πιο εξειδικευμένες.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα επιλογή είναι η Demonstrations που μας οδηγεί σε μια [ιστοσελίδα](https://demonstrations.wolfram.com) όπου υπάρχουν έτοιμα ολοκληρωμένα παραδείγματα επίδειξης που αντιμετωπίζουν συγκεκριμένα θέματα.

demonstrations.wolfram.com

BROWSE TOPICS

Mathematics Algebra Calculus & Analysis ...	Business & Social Systems Economics Finance ...	Creative Arts Art Architecture Music ...
Computation Algorithms Computer Science ...	Systems, Models & Methods Discrete Models Networks ...	Kids & Fun For Kids Puzzles Optical Illusions ...
Physical Sciences Physics Earth Science ...	Engineering & Technology Machines Electrical Engineering ...	Mathematica Functionality Short Programs 3D Graphics ...
Life Sciences Biology Medicine ...	Our World Everyday Life Geography ...	Browse by US Common Core State Standards NEW



1

Βασικά Χαρακτηριστικά

Το συντακτικό της Mathematica

Οι εντολές της Mathematica συντάσσονται ως εξής:

Function[argument, parameter]

Κάποιες εντολές δέχονται περισσότερα του ενός ορίσματα ή παραμέτρους:

Function[{arg1, arg2, ...}, {par1, par2,...}]

ΕΝΤΟΛΗ	ΚΟΙΝΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ
Integrate [f[x], {x, a, b}]	Ολοκλήρωσε τη συνάρτηση $f(x)$ ως προς x από a έως b
D [f[x], x]	Παραγώγισε τη συνάρτηση $f(x)$ ως προς x
Sum [f[n], {n, nmin,nmax}]	Άθροισε τη συνάρτηση $f(n)$ (της ακέραιας μεταβλητής n) ως προς n από $nmin$ έως $nmax$
Plot [f[x], {x, a, b}]	Σχεδιάζει τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x)$ για x από a έως b

Υπάρχει και εναλλακτικός τρόπος σύνταξης των συναρτήσεων που τον χρησιμοποιούμε συνήθως στην εντολή $N(Numerate)$: **Argument//Command**



1 | Βασικά Χαρακτηριστικά Παραδείγματα Εντολών

In[8]:= **Exp**[2.3]

Out[8]= 9.97418

In[14]:= **Sin**[**Pi** / 2]

Out[14]= 1

In[15]:= **Log**[**E** ^ 5]

Out[15]= 5

In[33]:= **Sqrt**[3]

Out[33]= $\sqrt{3}$

In[32]:= $\sqrt{3}$ // **N**

Out[32]= 1.73205

In[34]:= **N**[**Pi**]

3.14159

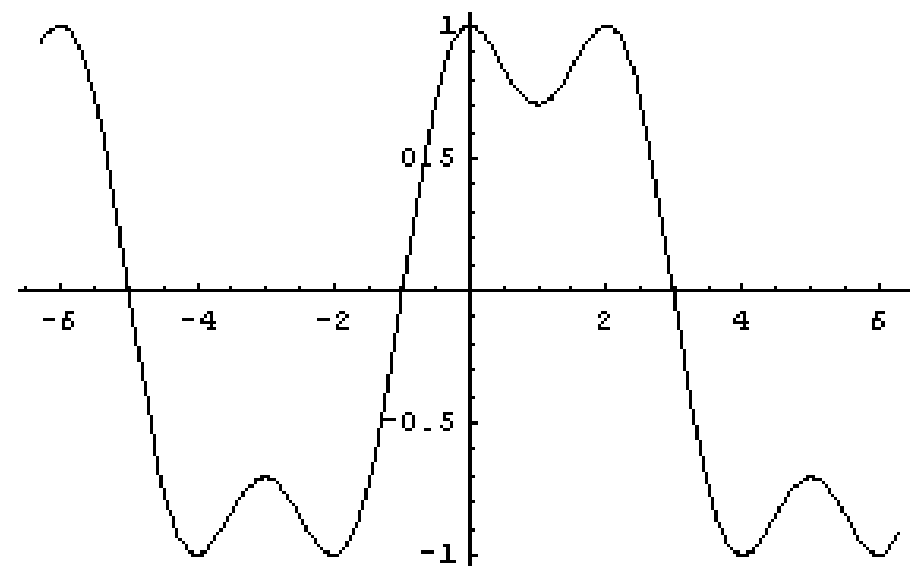
In[16]:= **(5 + 4 - 1.5) ^ 2 - 2 * (3 - 1)**

Out[16]= 52.25

In[17]:= **2.4 ^ 3 / 8.9 ^ 2**

Out[17]= 0.174523

In[4]:= **Plot**[**Sin**[**Pi** / 4 **X**] ^ 3 + **Cos**[**Pi** / 4 **X**] ^ 3, {**X**, -2 **Pi**, 2 **Pi**}]



Out[4]= - Graphics -

In[18]:= **Round**[3.1234]

Out[18]= 3

In[20]:= **ArcCos**[**Sqrt**[3] / 2]

Out[20]= $\frac{\pi}{6}$



1 Βασικά Χαρακτηριστικά

Τι μπορώ να κάνω στο σημειωματάριο

Η Mathematica εκτός από τις εντολές μπορεί να δεχθεί και κείμενο, τίτλους, σχόλια, εξισώσεις που δεν υπολογίζονται απλά περιγράφουν το πρόβλημα.

8. Collisions

A **collision** occurs when one object hits another. The special kind of collision for which energy is conserved is called an **elastic** collision. For example, the hard balls on a billiard table have almost elastic collisions with each other. For simplicity, suppose the two objects are spheres and they are moving only in one dimension as indicated by the diagram below before the collision.

Initially, the particles are located at positions at x_1 and x_2 . After a time Δt the particles are located at new positions X_1 and X_2 where

$$X_1 = x_1 + v_1 \Delta t \quad (1)$$

$$X_2 = x_2 + v_2 \Delta t \quad (2)$$

Ball 1 is moving to the left and has a negative velocity while ball 2 is moving to the right with a positive velocity. When the distance between the centers of the particles is equal to the diameter of the spheres $\text{Dia} = X_2 - X_1$, a collision occurs. Subtraction of equations 1 and 2 yields

$$(X_2 - X_1) = (x_2 - x_1) + (v_2 - v_1) \Delta t \quad (3)$$

where $\Delta t = t_{\text{collis}}$ is the time when the collision occurs. Substitution for the Dia on the left hand side of equation (3) and solving for $\Delta t = t_{\text{collis}}$ yields

$$t_{\text{collis}} = \frac{\text{Dia} - (x_2 - x_1)}{(v_2 - v_1)} \quad (4)$$

The two spheres have mass m_1 and m_2 and as a result of the collision, the velocity of m_1 changes from v_1 to V_1 and the velocity of m_2 changes from v_2 to V_2 . The way the velocities change as a result of the collision is determined by **conservation of momentum**

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \quad (5)$$

together with **conservation of energy**

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \quad (6)$$

assuming the collision conserves energy (the collision is elastic). It is assumed for simplicity, the balls only slide and do not roll otherwise rotational kinetic energy must be included in equation 6. Define Δ_1 as the change in velocity of particle m_1 due to the collision (and similarly for particle m_2) thus

$$V_1 = v_1 - \Delta_1 \quad (7)$$

Αν θέλω να γράψω σχόλια σε εντολές Input αυτό γίνεται αν τα κλείσω μέσα σε (* και *), οπότε ο πυρήνας δεν τα λαμβάνει υπόψη του στους υπολογισμούς.

Κάθε τι που πληκτρολογείτε αποτελεί ένα κελί όπως φαίνεται και από την αγκύλη στο δεξί μέρος της οθόνης, ενώ ομάδες κελιών περιλαμβάνονται σε μεγαλύτερες αγκύλες. Υπάρχουν διάφορων τύπων κελιά που δεν επεξεργάζονται και δεν οδηγούν σε κάποιον υπολογισμό (όπως κάνει ο τύπος *Input*) π.χ. τίτλος, τμήμα, υποενότητα. Μπορώ να διαγράψω, αντιγράψω κελιά απλά επιλέγοντας την αντίστοιχη αγκύλη του κελιού ή την αντίστοιχη αγκύλη της ομάδας κελιών και στη συνέχεια επιλέγω Cut, Copy, Paste, Del.



2 | Αριθμοί, Τελεστές και Σταθερές

Ακρίβεια υπολογισμών

Στη Mathematica υπάρχουν 2 βασικοί τύποι αριθμητικών δεδομένων.

Οι ακριβείς αριθμοί (**exact numbers**) και οι προσεγγιστικοί (**approximate numbers**)

Οι ακέραιοι, οι ρητοί αριθμοί και οι σταθερές είναι ακριβείς αριθμοί.

Οι προσεγγιστικοί αριθμοί είναι οι πραγματικοί (π.χ. οι δεκαδικοί) αριθμοί που μπορούν να έχουν μεταβλητό πλήθος δεκαδικών ψηφίων. Η τελεία στο τέλος ενός αριθμού δηλώνει ότι είναι προσεγγιστικός πραγματικός αριθμός. (π.χ. 543.)

Π.χ. ο αριθμός $\frac{6172}{1111}$ είναι ένας ακριβής ρητός αριθμός.

Η εντολή $\frac{6172}{1111}/N$ δίνει: 5.55536 που είναι η προσέγγιση του ακριβή αριθμού $\frac{6172}{1111}$ με 6 σημαντικά ψηφία (1 ψηφίο στο ακέραιο μέρος και 5 δεκαδικά ψηφία)

Οι υπολογισμοί στους προσεγγιστικούς αριθμούς γίνονται με **16** σημαντικά ψηφία ενώ **6** ψηφία εμφανίζονται στην απάντηση.

Για να αλλάξετε το πλήθος των ψηφίων που εμφανίζονται σε ένα αποτέλεσμα ή σε ένα υπολογισμό:

NumberForm[N[Pi],10] 3.141592654 N[Pi/3, 16] 1.047197551196598

Εναλλακτικός τρόπος γραφής μεγάλων ή μικρών αριθμών:

ScientificForm[{123450000.0,0.000012345,123.45}] {1.2345×10⁸,1.2345×10⁻⁵,1.2345×10²}



2 | Αριθμοί, Τελεστές και Σταθερές
Τελεστές, Σταθερές και Συναρτήσεις

ΠΡΑΞΗ ή ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΣΥΜΒΟΛΟ ΤΗΣ MATHEMATICA
e	E
π	Pi
∞	Infinity
i	I
Ln(x)	Log[x]
Log(x)	Log[10,x]

ΠΡΑΞΗ ή ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΣΥΜΒΟΛΟ ΤΗΣ MATHEMATICA
Πρόσθεση	+
Αφαίρεση	-
Πολλαπλασιασμός	* ή διάκενο
Διαίρεση	/
Ύψωση σε δύναμη (x ⁿ)	x^n
Τριγωνομετρικές συναρτήσεις	Sin[x], Cos[x], Tan[x], ...
Εκθετικό, Λογάριθμος	Exp[x], Log[x]
Υπερβολικές συναρτήσεις	Sinh[x], Cosh[x], Tanh[x], ...
Αντίστροφες τριγωνομετρικές ή υπερβολικές συναρτήσεις	ArcSin[x], ArcTan[x], ... ArcSinh[x], ArcTanh[x], ...
Απόλυτη τιμή του x	Abs[x]
Πρόσημο του x (=1 αν x>0, -1 αν x<0)	Sign[x]



2 | Αριθμοί, Τελεστές και Σταθερές

Πόσα σημαντικά ψηφία;

N[Pi]

3.14159

N[Pi, \$MachinePrecision]

3.141592653589793

N[Pi, 30]

3.1415926535897932384626433832795

FindRoot[x^2-2,{x,1},WorkingPrecision→60]

{x→1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317668}

FindRoot[x^2-2,{x,1}, WorkingPrecision→2 MachinePrecision]

{x→1.414213562373095048801688724209}



2 | Αριθμοί, Τελεστές και Σταθερές

Απλοί υπολογισμοί

```
In[11]:= 5 + 7 + 3 + 12
```

```
Out[11]= 27
```

```
In[12]:= 2.3 + 5.63 - 1.56
```

```
Out[12]= 6.37
```

```
In[14]:= 2 * 3 * 4 * 6
```

```
Out[14]= 144
```

```
In[15]:= 2 3 4 6
```

```
Out[15]= 144
```

```
In[16]:= (5 + 4 - 1.5) ^ 2 - 2 * (3 - 1)
```

```
Out[16]= 52.25
```

```
In[17]:= 2.4 ^ 3 / 8.9 ^ 2
```

```
Out[17]= 0.174523
```

Τι κάνουν οι παρακάτω εντολές;

1/0, Infinity-Infinity, Infinity/Infinity

Πόσα δεκαδικά ψηφία χρειάζονται για τον ακριβή υπολογισμό του 15!

Η εντολή Print: **Print[x^2,"=",12434]**

Η εντολή Degree: **Cos[30 Degree]**



3 Ενσωματωμένες συναρτήσεις

Παραδείγματα εντολών

`In[8]:= Sqrt[16]``Out[8]= 4``In[8]:= Exp[2.3]``Out[8]= 9.97418``In[14]:= Sin[Pi / 2]``Out[14]= 1``In[15]:= Log[E ^ 5]``Out[15]= 5``In[18]:= Round[3.1234]``Out[18]= 3``In[20]:= ArcCos[Sqrt[3] / 2]``Out[20]=  $\frac{\pi}{6}$` `In[27]:= ArcSin[Sqrt[2] / 2]``Out[27]= $\frac{\pi}{4}$` `In[23]:= ArcTan[1]``Out[23]=  $\frac{\pi}{4}$` `In[77]:= N[Tan[2], 30]``Out[77]= -2.18503986326151899164330610231``In[51]:= Sqrt[3] ^ 5.6``Out[51]= 21.674``In[52]:= N[E]``Out[52]= 2.71828``In[54]:= Sqrt[-3]``Out[54]= $i \sqrt{3}$` `In[56]:= Sqrt[-3] // N``Out[56]= 0. + 1.73205 i`



4 | Αλγεβρικές Παραστάσεις

Αναλυτικοί Υπολογισμοί

Expand: Αναπτύσσει τα γινόμενα και τις δυνάμεις που υπάρχουν σε μία έκφραση:

```
In[1]:= Expand[(x+y)^2]
```

```
Out[1]:= x^2+2xy+y^2
```

Factor: Παραγοντοποιεί μια συγκεκριμένη έκφραση

```
In[2]:= Factor[%]
```

```
Out[2]:= (x+y)^2
```

Ποια η διαφορά των παρακάτω εντολών;

```
Expand[(x-1)^2/(x+1)^2]
```

```
ExpandAll[(x-1)^2/(x+1)^2]
```

Together: Αθροίζει αλγεβρικά κλάσματα και απλοποιεί κοινούς παράγοντες μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή

```
In[4]:= Together[1/(x+1)+x/(x^2-1)]
```

```
Out[4]:= 
$$\frac{-1+2x}{(-1+x)(1+x)}$$

```

Apart: Χωρίζει ένα αλγεβρικό κλάσμα σε άθροισμα μερικών κλασμάτων με απλούστερους παρονομαστές

```
In[5]:= Apart[%]
```

```
Out[4]:= 
$$\frac{-1}{2(-1+x)} + \frac{3}{2(1+x)}$$

```



4 | Αλγεβρικές Παραστάσεις

Απλοποιήσεις

Cancel: *Απλοποιεί κοινούς παράγοντες μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή σε ένα αλγεβρικό κλάσμα*

```
In[5]:= Cancel[(x^2+4 x)/(x^2-x)+(x^2+3 x-4)/(x^2-1)]
```

```
Out[5]:=  $\frac{4+x}{-1+x} + \frac{4+x}{1+x}$ 
```

Simplify: *Εκτελεί μια σειρά από αλγεβρικούς μετασχηματισμούς στη συγκεκριμένη έκφραση και επιστρέφει το απλούστερο αποτέλεσμα*

```
In[6]:= Simplify[18+39 x + 29 x^2 +9 x^3+x^4]
```

```
Out[6]:=  $(3+x)^2 (2+3x+x^2)$ 
```

FullSimplify: *Παρόμοια εντολή με την Simplify αλλά εκτελεί μια μεγαλύτερη ομάδα μετασχηματισμών*

```
In[6]:= FullSimplify[18+39 x + 29 x^2 +9 x^3+x^4]
```

```
Out[6]:=  $(1+x)(2+x)(3+x)^2$ 
```



5 | Χειρισμός Δεδομένων

Χρήση προηγούμενων αποτελεσμάτων

```
In[1]:= 3 + 2 + 1
```

```
Out[1]= 6
```

```
In[2]:= 4 * Out[1]
```

```
Out[2]= 24
```

```
In[3]:= 10 * %
```

```
Out[3]= 240
```

```
In[4]:= 10 * %%%
```

```
Out[4]= 60
```



6 | Μεταβλητές

Ορισμός-Πράξεις

- Στη Mathematica όπως και στην Άλγεβρα μπορούμε να κάνουμε πράξεις με μεταβλητές.
- Το όνομα μιας μεταβλητής μπορεί να περιέχει ένα ή περισσότερα γράμματα ή αριθμούς αλλά το πρώτο στοιχείο πρέπει απαραίτητα να είναι ή γράμμα ή το σύμβολο \$.
- Επίσης μέσα στο όνομα δεν επιτρέπεται να περιλαμβάνονται κενά, τα δε ονόματα πρέπει να χωρίζονται μεταξύ τους με κάποιο κενό από τα σύμβολα των πράξεων.

Ορισμός Τιμής

```
In[1]:=a=3.1;
```

```
In[4]:=a*Sin[Pi/4]//N
```

```
Out[4]:=2.191158
```

Διαγραφή Τιμής

```
In[5]:=a.
```

```
In[5]:=Clear[a]
```

Πολλαπλές Τιμές

```
In[1]:=a=3.1;b=451;c=12345.789;d=0.001;
```

```
In[10]:=Clear [a, b, c, d]
```

Η εντολή `Clear[f]` διαγράφει τον ορισμό και τις τιμές που σχετίζονται με το σύμβολο f
Η εντολή `ClearAll[f]` και τις ιδιότητες, μηνύματα, προεπιλογές που σχετίζονται με το σύμβολο f



7 | Πολυώνυμα
Τιμή πολυωνύμου

```
In[57]:= 3 x /. x -> 2
```

```
Out[57]= 6
```

```
In[59]:= 4 x^2 + 3 x + 5 /. x -> 0.34
```

```
Out[59]= 6.4824
```

```
6.482399999999999`
```

```
In[66]:= 3 x + 5 y Sin[x y] /. {x -> 10, y -> 25}
```

```
Out[66]= 30 + 125 Sin[250]
```

```
30 + 125 Sin[250] // N
```

```
-91.316
```

```
-91.31600244272566`
```



8 | Συναρτήσεις Χρήστη

Ορισμός-Χρήσεις

Ο ορισμός μιας συνάρτησης στη Mathematica γίνεται με την παρακάτω εντολή:

$$f[x_]:= (x-1)^2$$

Στη συνέχεια μπορώ να υπολογίσω τιμές τις συνάρτησης με τους παρακάτω τρόπους

$$f[1] \quad f[3] \quad f[5] \quad f[7] \quad f[9]$$
$$f[\{1,3,5,7,9\}]$$
$$f[x]/.\{\{x\rightarrow 1\},\{x\rightarrow 3\},\{x\rightarrow 5\},\{x\rightarrow 7\},\{x\rightarrow 9\}\}$$
$$\text{Table}[f[x], \{x, 1, 1000\}]$$
$$\text{Table}[f[\text{Range}[1000]]]$$

Διαγραφή τύπου συνάρτησης & τιμών

$$a=5;$$
$$f[x_]:=x^3$$
$$\text{Clear}[a, f]$$



8 | Συναρτήσεις Χρήστη

Όριο συνάρτησης

Πλευρικά Όρια

 $\text{Limit}[\text{συνάρτηση}, x \rightarrow x_0, \text{Direction} \rightarrow 1]$ $\text{Limit}[1/x, x \rightarrow 0, \text{Direction} \rightarrow 1] \quad -\infty$ $\text{Limit}[\text{συνάρτηση}, x \rightarrow x_0, \text{Direction} \rightarrow -1]$ $\text{Limit}[1/x, x \rightarrow 0, \text{Direction} \rightarrow -1] \quad \infty$

```
In[87]:= Limit[x Cos[x] / x, x -> 1]
```

```
Out[87]= Cos[1]
```

```
In[88]:= Cos[1] // N
```

```
Out[88]= 0.540302
```

```
In[85]:= Limit[1 / x ^ 2, x -> Infinity]
```

```
Out[85]= 0
```

```
In[89]:= Limit[x Log[x], x -> 0]
```

```
Out[89]= 0
```

```
In[90]:= Limit[(1 + 3 x) ^ (1 / x), x -> 0]
```

```
Out[90]= e^3
```

```
In[91]:= e^3 // N
```

```
Out[91]= 20.0855
```



8 | Συναρτήσεις Χρήστη

Ανάπτυγμα συνάρτησης

Series[f(x), {x, x₀, τάξη}]

Series[f[x], {x, a, 3}]

$$\text{Out}[1]= f[a] + f'[a] (x-a) + \frac{1}{2} f''[a] (x-a)^2 + \frac{1}{6} f^{(3)}[a] (x-a)^3 + O[x-a]^4$$

$$\text{Series}[x \cos[x], \{x, 0, 8\}] \quad \left| \quad x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \frac{x^7}{720} + O[x]^9 \right|$$

$$\text{Series}[x \cos[x], \{x, 0, 8\}] // \text{Normal} \quad \left| \quad x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \frac{x^7}{720} \right|$$

Series[Exp[x], {x, 0, 10}]

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{3628800} + O[x]^{11}$$



8

Συναρτήσεις χρήστη

Αθροίσματα, Γινόμενα

Sum, Product: Αναλυτικός Υπολογισμός

NSum, NProduct: Αριθμητική προσέγγιση

```
In[119]:= Sum[x^i / i, {i, 1, 7}]
```

```
Out[119]= x +  $\frac{x^2}{2}$  +  $\frac{x^3}{3}$  +  $\frac{x^4}{4}$  +  $\frac{x^5}{5}$  +  $\frac{x^6}{6}$  +  $\frac{x^7}{7}$ 
```

```
In[123]:= Product[x + i, {i, 1, 7}]
```

```
Out[123]= (1 + x) (2 + x) (3 + x) (4 + x) (5 + x) (6 + x) (7 + x)
```

```
Expand[(1 + x) (2 + x) (3 + x) (4 + x) (5 + x) (6 + x) (7 + x)]
```

```
Out[126]= 5040 + 13068 x + 13132 x^2 + 6769 x^3 + 1960 x^4 + 322 x^5 + 28 x^6 + x^7
```



9 | Λύνοντας ασκήσεις Επίλυση Εξισώσεων & Συστημάτων

```
In[78]:= Solve[4 x^2 + 3 x - 12 == 0, x]
```

```
Out[78]= {{x -> 1/8 (-3 - Sqrt[201])}, {x -> 1/8 (-3 + Sqrt[201])}}
```

```
In[79]:= {{x -> 1/8 (-3 - Sqrt[201])}, {x -> 1/8 (-3 + Sqrt[201])}} // N
```

```
Out[79]= {{x -> -2.14718}, {x -> 1.39718}}
```

```
In[80]:= Solve[{x + y == 3, x - y == 2}, {x, y}]
```

```
Out[80]= {{x -> 5/2, y -> 1/2}}
```

Solve: Αναλυτικός Υπολογισμός
NSolve: Αριθμητικός Υπολογισμός



9 | Λύνοντας ασκήσεις

Εύρεση ριζών

`FindRoot[f,{x, x0}]`

βρίσκει μια αριθμητική ρίζα της f , ξεκινώντας από το σημείο $x=x_0$.

`FindRoot[lhs==rhs,{x, x0}]`

βρίσκει μια αριθμητική λύση της εξίσωσης $lhs==rhs$.

`FindRoot[Sin[x] + Exp[x], {x, 0}]`

`{x → -0.5885327439818611}`

`FindRoot[{f1,f2,...},{x,x0},{y,y0},...]`

βρίσκει μια κοινή αριθμητική ρίζα όλων των f_i .

`FindRoot[{Exp[x - 2] == y, y^2 == x}, {{x, 1}, {y, 1}}]`

`{x → 0.019026, y → 0.137934}`

`FindRoot[{eqn1,eqn2,...},{x,x0},{y,y0},...]`

βρίσκει μια κοινή αριθμητική λύση του συνόλου των εξισώσεων eqn_i .

Εργασία 7 | **Απλοί υπολογισμοί με Mathematica****1. Τι κάνουν οι παρακάτω εντολές:**

$1/0$, Infinity-Infinity, Infinity/Infinity

2. Πόσα δεκαδικά ψηφία χρειάζεστε για να υπολογίσετε με την μέγιστη ακρίβεια το 15!;**3. Ποιο το αποτέλεσμα των παρακάτω εντολών:**

Simplify[(x+1) (x-1)] Simplify[x²+2 x+1]

Simplify[(x-1) (x+1) (x²+1) (x²-x+1) (x²+x+1) (x⁴-x²+1)]

Factor[x³+6 x²+11 x+6] Factor[x³+x² y+x y²+y³]

Cancel[(x+1)³/(x²+2 x+1)]

Expand[(x-1)²/(x+1)²]

Ποια είναι η αριθμητική τιμή τους για x=1;

Τι κάνει η εντολή FactorInteger[n];

Να εφαρμόσετε την παραπάνω εντολή στους αριθμούς 1234567890 και 9876543210 για να βρείτε το μέγιστο κοινό διαιρέτη και το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τους

4. Να ορίσετε τις σταθερές α=5, β=3 και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα: α+β, α-β, α²+β², α³+β³, α³-β³**5. Να ορίσετε τη συνάρτηση f(x)=x²/(x-1)² και να υπολογίσετε τις τιμές της για τους ακέραιους x=1 ως 100.**



Εργασία 7 | Απλοί υπολογισμοί με Mathematica

6. Υπολογίστε τις αριθμητικές τιμές:

(α) $\sin(5/2)$

(β) $\text{τοξεφ}(2)$

(γ) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$

(δ) $\cosh(10)$

(ε) $\sqrt[3]{100}$

(στ) $\log(\ln(3^{27}))$

(ζ) $50!$

(η) e^{50}

(θ) $\log(e \cdot \pi)$

(ι) 2^{100}

Ποια από τα αποτελέσματα που πήρατε είναι ακριβή και ποια προσεγγιστικά;

Υπολογίστε τις παρακάτω αριθμητικές τιμές με την παρατιθέμενη ακρίβεια:

e με 100 σημαντικά ψηφία, με 30 σημαντικά ψηφία

$\log(\pi)$ με 50 σημαντικά ψηφία, e^π με 100 σημαντικά ψηφία

$\text{εφ}(2)$ με 20 σημαντικά ψηφία

Ζητήστε από τη Mathematica να σας δώσει, τις ακριβείς τιμές των ακόλουθων εκφράσεων:

(α) $\cos(\pi/6)$

(β) $\sin(\pi/4)$

(γ) $\sin(\pi/12)$

(δ) $e^{i\pi}$

(ε) $\tan(\pi/12)$

(στ) $e^{i\pi/2}$

(ζ) $e^{i\pi/3}$

(η) $e^{i\pi/6}$



Εργασία 7 | Απλοί υπολογισμοί με Mathematica

7. Υπολογίστε τα αθροίσματα:

$$(\alpha) \sum_{n=1}^{148} \frac{1}{n^6} \quad (\beta) \sum_{n=1}^{100} n \cos(n) \quad (\gamma) \sum_{n=1}^5 e^{-n}$$

$$(\delta) \sum_{n=1}^8 \frac{1}{n!} \quad (\epsilon) \sum_{n=1}^{189} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

8. Υπολογίστε τα γινόμενα:

$$(\alpha) \prod_{n=1}^{10} \frac{1}{(n!)^2} \quad (\beta) \prod_{n=1}^{35} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (\gamma) \prod_{n=1}^5 \frac{1}{e^n}$$

9. Υπολογίστε τα όρια των συναρτήσεων:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 e^{-2x})$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)^{1/\ln x} \quad (\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$(\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \quad (\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x - \ln a}{x - z}$$

Πως γίνεται η τιμή της (στ) αν θεωρήσω την παράμετρο $a=7.32\pi$;



Εργασία 7 | Απλοί υπολογισμοί με Mathematica

10. Τι κάνουν οι παρακάτω εντολές:

`FindRoot[Sin[x]+Exp[x], {x,0}]``FindRoot[Cos[x]==x, {x,0}]`**Να υπολογιστεί η πλησίον της μονάδος ρίζα των εξισώσεων**

$$(\alpha) \quad x^4 - 3xe^x + 5 = 0$$

$$(\beta) \quad x^{12} + \cos(x) - x^2 - 12 = 0$$

$$(\gamma) \quad x^6 + 5x^5 - 27 = 0$$

Να υπολογιστούν οι λύσεις των εξισώσεων και των συστημάτων

$$(\alpha) \quad x^3 - 3x + 3 = 0$$

$$(\beta) \quad \cos x = \tan x$$

$$(\gamma) \quad \begin{cases} \cos x + \sin y = 0.5 \\ \tan x = 1 \end{cases}$$

$$(\delta) \quad \begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 4x + 6y = 60 \end{cases}$$

$$(\epsilon) \quad \begin{cases} x^2 + 13y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$(\sigma\tau) \quad \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 3} = 1$$

$$(\zeta) \quad \begin{cases} \omega + x + y + z = 3 \\ 2\omega + 4x + 3y + 5z = 8 \\ \omega - x - y + z = 5 \\ \omega + 3x - 7y - z = 12 \end{cases}$$