

## Εργασία -9: Παραγωγίζοντας και Ολοκληρώνοντας

### 1. Για τις συναρτήσεις:

(α)  $x e^{-x}$       (β)  $x \ln x$       (γ)  $\sin(e^x)$       (δ)  $\tanh(x)$       (ε)  $\frac{x \ln x}{1-x} + \ln(1-x)$

(στ)  $(1+1/x)^x$     (ζ)  $(x^2+1)\ln x$     (η)  $x^3 \sqrt{x} \ln x$     (θ)  $\ln x/x^2$       (ι)  $\sin^2(3x^2+\pi/4)$

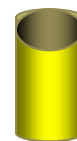
Υπολογίστε μέχρι και τη δεύτερη παράγωγο και στη συνέχεια τις αντίστοιχες αριθμητικές τιμές για  $x=2.2$

2. Για τις παραπάνω συναρτήσεις υπολογίστε αρχικά τα αόριστα ολοκληρώματα και στη συνέχεια τις τιμές των αντίστοιχων ορισμένων ολοκληρωμάτων για όρια ολοκλήρωσης από 1 έως 2.

3. Βρείτε τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα του πολυωνύμου:  $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$

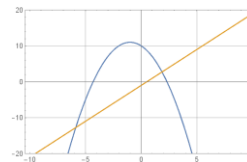
Η 1<sup>η</sup> παράγωγος συνάρτησης μηδενίζεται σε τοπικό ακρότατο, ενώ αν η 2<sup>η</sup> παράγωγος στο ίδιο σημείο είναι  $<0$  τότε είναι μέγιστο ενώ αν είναι  $>0$  ελάχιστο.

4. Βρείτε την ακτίνα ( $r$ ) και το ύψος ( $h$ ) ενός κυλινδρικού δοχείου με όγκο  $64 \text{ cm}^3$  και ελάχιστη επιφάνεια. Οι τύποι που θα χρησιμοποιήσετε είναι:  $V=\pi r^2 h \Rightarrow h=V/\pi r^2$ ,  $S=\pi r^2+2\pi r h$ .  $S'=0$ , Επιλέξτε τη λύση  $r>0$ .



5. Βρείτε το εμβαδόν μεταξύ των καμπυλών  $y=-x^2-2x+10$  και  $y=2x-1$  ( $y, x$  σε m).

Βρείτε τα σημεία τομής. Υπολογίστε το ορισμένο ολοκλήρωμα για κάθε μια και υπολογίστε τη διαφορά



6. Το έργο μιας δύναμης δίνεται από τη σχέση  $W = \int_{s_1}^{s_2} F ds$ . Με τη βοήθεια αυτής της σχέσης να υπολογίσετε για  $F=-Kx$ ,  $F=-1/2 Kx^2$ ,  $F=K\cos(x)$  και για  $x$  από  $-1$  μέχρι  $1 \text{ m}$  και  $K=100 \text{ N/m}$  το έργο κάθε δύναμης και το συνολικό έργο σε J.

7. Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση:  $y' - \frac{1}{x}y = x^a$ . Ποια είναι η λύση για  $a \neq 0$  και ποια για  $a=0$ ;

8. Δείξτε ότι η λύση της εξίσωσης Bernoulli  $y'=2y/x+y^2$  είναι  $y=(3x^2)/(c-x^3)$  (Βοήθεια: Υπολογίστε χωριστά το 1<sup>ο</sup> και το 2<sup>ο</sup> μέρος της εξίσωσης Bernoulli θέτοντας όπου  $y$  τη λύση και διαπιστώστε ότι είναι ίσα μεταξύ τους)

9. Βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης  $y'''-6y''+11y'-6y=0$ ,  $y(0)=1$ ,  $y'(0)=2$ ,  $y''(0)=3$  αντικαθιστώντας  $y=e^{ax}$ . (Βοήθεια:  $y[x_]:=Exp[a x]$ ,  $y'''[x]-6y''[x]+11y'[x]-6y[x]$ ,  $Solve[\%==0, a]$ )

10. Βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης  $y''+2ay'+a^2y=1$  με αρχικές συνθήκες  $y[0]=1$  και  $y'[1]=1$ . Πως διαμορφώνεται η γενική λύση για  $a=1$ .

(Βοήθεια:  $y[x_]:=Exp[a x]$ ;  $A=y''[x]+2ay'[x]+a^2y[x]$ ;  $Solve[\{A==0, y[0]==1, y'[1]==1\}, x]$ )

**Πρόβλημα 9.11: Κλίση καμπύλης**

Στο πρόβλημα αυτό καλείστε να διερευνήσετε την ορθότητα της προσεγγιστικής σχέσης  $Slope(t, \Delta t) = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$  για τον προσεγγιστικό υπολογισμό της κλίσης μιας συνάρτησης-καμπύλης  $f(t)$ . Το όριο της συνάρτησης αυτής όταν  $\Delta t \rightarrow 0$  μας δίνει την παράγωγο-κλίση της συνάρτησης αυτής. Ο έλεγχος αυτός θα γίνει δοκιμάζοντας διάφορες τιμές στις μεταβλητές  $\Delta t$ ,  $t$  και βλέποντας την επίδραση τους στην προσεγγιστικό υπολογισμό της κλίσης και συγκρίνοντας τις τιμές αυτές με τον απευθείας υπολογισμό της παραγώγου της συνάρτησης που αποτελεί και τον ακριβή τύπο υπολογισμού της κλίσης.

- α). Υπολογίστε την κλίση της καμπύλης  $g(t)=2t^3$  στο σημείο  $t=1.0$  θεωρώντας το  $\Delta t=2, 1, 0.1, 0.01, 0.001$  με τη βοήθεια της προσεγγιστικής σχέσης. Με τη βοήθεια της ListPlot σχεδιάστε το διάγραμμα  $x, y$  όπου  $x=\Delta t$  και  $y=κλίση$ . Τι συμβαίνει στην αριθμητική τιμή της κλίσης καθώς το  $\Delta t$  γίνεται ολοένα και μικρότερο; Δείξτε με την εντολή Show στο ίδιο διάγραμμα τις δύο καμπύλες μεταβολής της προσεγγιστικής κλίσης στο διάστημα  $0 < t < 10$  για 2 ακραίες τιμές του  $\Delta t=10$  και  $\Delta t=0.001$ . Τι παρατηρείτε από την σύγκριση των δύο καμπυλών; Τι αλλάζει αν το διάστημα υπολογισμού γίνει  $0 < t < 100$ ;
- β). Σχεδιάστε την κλίση της καμπύλης  $h(t)=\cos(t)$  στο διάστημα  $0 < t < 2\pi$  χρησιμοποιώντας  $\Delta t=0.05$ . Επίσης σχεδιάστε την παράγωγο της παραπάνω συνάρτησης. Με την εντολή Show δείξτε στο ίδιο διάγραμμα τις δύο καμπύλες και να σχολιάσετε την συμφωνία των καμπυλών.

**Πρόβλημα 9.12: Εμβαδόν καμπύλης**

- α). Υπολογίστε με τις δύο προσεγγιστικές μεθόδους το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη  $f(x)=x^4$  από  $x=1$  ως  $x=4$  θέτοντας τον αριθμό των βημάτων  $N=40$ .  
Υπολογίστε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα.  
Ποια από τις δύο προσεγγιστικές μεθόδους δίνει καλύτερο αποτέλεσμα;
- β). Υπολογίστε με τη δεύτερη προσεγγιστική μέθοδο από  $t=1$  ως  $t=4$  (μεσαίας τιμής) το εμβαδόν της καμπύλης  $g(t)=4t^3$  για  $N=10-100$  με βήμα 5.  
Σχεδιάστε τις καμπύλες στο ίδιο διάγραμμα  $xy$  όπου  $x$  το  $N$  και  $y$  το εμβαδόν.  
Τι παρατηρείτε;