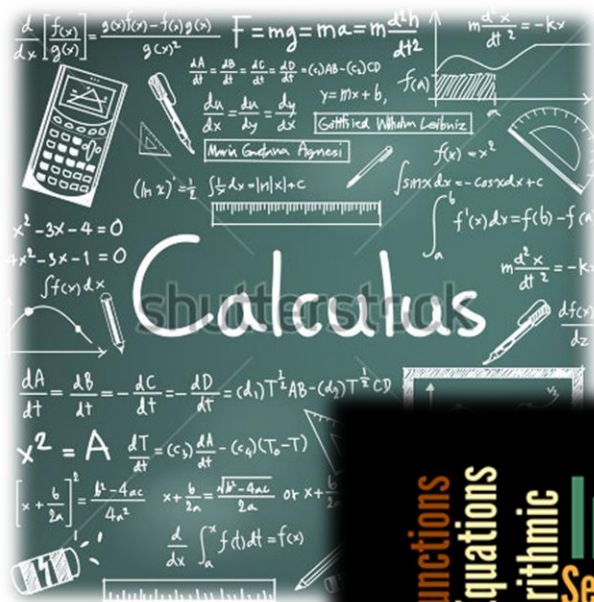




Functions
Equations
Logarithmic
Series
Limits
Differential
Exponential
Continuity
Applications
Integrals
Derivatives
Definite
Indefinite

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}_+} T(x) f(x, \theta) dx = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial}{\partial \theta} T(x) f(x, \theta) dx$$

$$\sigma^2(\xi_1) = \frac{(\xi_1 - a)^2}{\sigma^2} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial}{\partial \theta} T(x) f(x, \theta) dx = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial}{\partial \theta} T(x) f(x, \theta) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} T(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx = M \left(T(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\xi, \theta) \right)$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} T(x) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x, \theta) \right) \cdot f(x, \theta) dx = \int_{\mathbb{R}_+} T(x) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{f(x, \theta)}{f(x, \theta)} \right) f(x, \theta) dx$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} M T(\xi) = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}_+} T(x) f(x, \theta) dx = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial}{\partial \theta} T(x) f(x, \theta) dx$$

Μ. Αγγελακέρης

Η Τέχνη και οι Τεχνικές μιας Επιστημονικής Αναφοράς

Από μια Αναλυτική Αναφορά Δεδομένων μέχρι
μια Ολοκληρωμένη Επιστημονική Παρουσίαση

Κεφάλαιο 7 Υπολογισμοί



Ομάδα Γ.

Ο υπολογιστής ως επιστημονικό
εργαλείο

Εργασία-9: Παραγωγίζοντας και
ολοκληρώνοντας

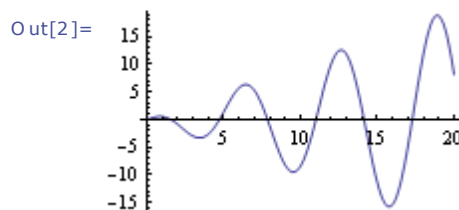
Wolfram
Mathematica®



1 | Ακρότατα συνάρτησης

Οι εντολές FindMinimum, και FindMaximum

Plot[x Cos[x],{x,0,20}]



FindMinimum[x Cos[x],{x,2}]
{-3.28837,{x→3.42562}}

FindMinimum[{x+y, x+2 y ≥ 3 && x ≥ 0 && y ≥ 0 && y ∈ Integers}, {x, y}]
{2., {x→1., y→1}}

FindMinimum[{x Cos[x], 1 ≤ x ≤ 15}, {x, 7}]
{-9.47729,{x→9.52933}}

FindMinimum[f,{x, x₀}] : βρίσκει ένα τοπικό ελάχιστο της f , ξεκινώντας από το σημείο $x=x_0$.

FindMinimum[f,{x, x₀}, {y, y₀},...] : τοπικό ελάχιστο της f , συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

FindMinimum[{f, cons}, {x, x₀}, {y, y₀},...] : τοπικό ελάχιστο της f , υπό περιορισμούς

FindMinimum[{f, cons},{x, y,...}] : ξεκινά από σημείο εντός των περιορισμών.

FindMaximum[f,{x, x₀}] : βρίσκει ένα τοπικό μέγιστο της f , ξεκινώντας από το σημείο $x=x_0$.

FindMaximum[f,{x, x₀}, {y, y₀},...] : τοπικό μέγιστο της f , συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

FindMaximum[{f, cons}, {x, x₀}, {y, y₀},...] : τοπικό μέγιστο της f , υπό περιορισμούς

FindMaximum[{f, cons},{x, y,...}] : ξεκινά από σημείο εντός των περιορισμών.



2

Παραγωγίζοντας

Μερικές Παράγωγοι: Η συνάρτηση D

D [f, x] : Υπολογίζει τη μερική παράγωγο $\partial f / \partial x$ **D [f, {x, n}]** : Υπολογίζει τη μερική παράγωγο $\partial^n f / \partial x^n$ **D [f, {x, y,...}]** : Διαδοχικός υπολογισμός μερικής παραγώγου ως προς $x, y, \dots$

- Όλες οι ποσότητες που δεν φαίνονται να σχετίζονται με τη μεταβλητή της παραγωγίσης λαμβάνονται ως σταθερές-έχουν μηδενική μερική παράγωγο.
- Το τελικό αριθμητικό αποτέλεσμα μιας παραγωγίσης πολλές φορές χρειάζεται την εντολή **N** ή κάποια εντολή απλοποίησης όπως η **Simplify** ή η **FullSimplify**

D[Sin[x]^10,{x,4}]5040 Cos[x]⁴ Sin[x]⁶-4680 Cos[x]² Sin[x]⁸+280 Sin[x]¹⁰**FullSimplify[%]**10 (141+238 Cos[2 x]+125 Cos[4 x]) Sin[x]⁶**Simplify[D[ArcTan[x],x]]**1/(1+x²)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D[\text{Sin}[x y]/(x^2+y^2), \{x, 2\}] - \frac{4xy \text{Cos}[xy]}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2 \text{Sin}[xy]}{x^2+y^2} + \left(\frac{8x^2}{(x^2+y^2)^3} - \frac{2}{(x^2+y^2)^2} \right) \text{Sin}[xy]$$



2 | Παραγωγίζοντας

Μερικές Παράγωγοι: Η συνάρτηση D

Quiz

Τι κάνει η παρακάτω εντολή της Mathematica;

D[x*Cos[x] , {x, 2}] /. x -> 2 // N

Αριθμητικό Αποτέλεσμα
2^{ης} παραγωγού συνάρτησης $x\cos(x)$
για $x=2$

Ποιο είναι το αποτέλεσμα της;

- 0.986301



2

Παραγωγίζοντας

Ολικές Παράγωγοι: Η συνάρτηση Dt

Dt[f, x] : Υπολογίζει την ολική παράγωγο df/dx **Dt[f]** : Υπολογίζει το ολικό διαφορικό df **Dt[f, {x, n}]** : Υπολογίζει την ολική παράγωγο n -τάξης $d^n f/dx^n$ **Dt[x y]** $y Dt[x] + x Dt[y]$ **Dt[a x + b, x]** $a + x Dt[a, x] + Dt[b, x]$ **Dt[x^2 + y^2 + z^2, x, Constants -> {z}]** $2x + 2y Dt[y, x, Constants \rightarrow \{z\}]$

- Όλες οι ποσότητες που δεν χαρακτηρίζονται ως σταθερές θεωρούνται συναρτήσεις της μεταβλητής x
- Σύμβολα – σταθερές ή κάποιες συναρτήσεις με σύμβολα – σταθερές λαμβάνονται ως σταθερές-έχουν μηδενική ολική παράγωγο.
- Το τελικό αριθμητικό αποτέλεσμα μιας παραγωγίσης πολλές φορές χρειάζεται την εντολή **N** ή κάποια εντολή απλοποίησης όπως η **Simplify** ή η **FullSimplify**

Ποια η διαφορά στο αποτέλεσμα μεταξύ των εντολών;

D[x^2 + y^2, x] και **Dt[x^2 + y^2, x]** $2x$ και $2x + 2y Dt[y, x]$



2 | Παραγωγίζοντας

Παραδείγματα εντολών

In[98]:= **D**[**x**^3, **x**]

Out[98]= $3 x^2$

In[101]:= **Dt**[**x**^3, **x**]

Out[101]= $3 x^2$

In[94]:= **D**[**Log**[**x**]^2, **x**]

Out[94]= $\frac{2 \operatorname{Log}[x]}{x}$

In[102]:= **D**[**x**^3, {**x**, 2}]

Out[102]= $6 x$

In[103]:= **D**[**Log**[**x**]^2, {**x**, 3}]

Out[103]= $-\frac{6}{x^3} + \frac{4 \operatorname{Log}[x]}{x^3}$

In[106]:= **Dt**[**x**^2 + **y**^2, **x**]

Out[106]= $2 x + 2 y \operatorname{Dt}[y, x]$



2

Παραγωγίζοντας

Ολικές Παράγωγοι: Η εντολή 'D'

 f' : Υπολογίζει την 1^η παράγωγο της συνάρτησης f *f'' : Υπολογίζει την 2^η παράγωγο της συνάρτησης f*

Έστω ότι σας δίνεται η συνάρτηση

$$f[x_] := \text{Sin}[x] + x^2$$

Πως μπορείτε να υπολογίσετε τις παρακάτω παραγώγους χωρίς την εντολή D;

$$f'[x]$$

$$2x + \text{Cos}[x]$$

$$D[f[x], x]$$

$$2x + \text{Cos}[x]$$

$$f'[0.5]$$

$$1.87758$$

$$D[f[x], x] /. x \rightarrow 0.5$$

$$1.87758$$

$$f''[x]$$

$$2 - \text{Sin}[x]$$

$$D[f[x], \{x, 2\}]$$

$$2 - \text{Sin}[x]$$



3 | Ολοκληρώνοντας

Η εντολή Integrate

Integrate [f, x] : Υπολογίζει το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$

Integrate [f, {x, x_{min}, x_{max}}] : Υπολογίζει το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x)dx$

Integrate[f,{x, x_{min}, x_{max}}, {y, y_{min}, y_{max}},...]: Υπολογίζει το πολλαπλό ολοκλήρωμα $\int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} f(x, y, \dots) dx dy \dots$

Integrate[1/(x^3+1), x]

ArcTan[(-1+2 x)/√3]/+1/3 Log[1+x]-1/6 Log[1-x+x^2]

Integrate[1/(x^3+1), {x, 0, 1}]

1/18 (2 √3π+Log[64])

Στα ολοκληρώματα μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει υποθέσεις (Assumptions) για να διευκολύνει τον υπολογισμό τους

Integrate[x^n, {x, 0, 1}, Assumptions→n>0]

1/(1+n)

Integrate[Abs[x+Abs[x]^2], x, Assumptions → x ∈ Reals]

Out[3]=
$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} & x \leq -1 \\ \frac{1}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} & -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} & \text{True} \end{cases}$$

NIntegrate: Αριθμητική προσέγγιση MONO σε ορισμένα ολοκληρώματα



3

Ολοκληρώνοντας

Η εντολή Integrate

`In[108]:= Integrate[3 x^3 + x^2, {x, a, b}]`

$$\text{Out[108]} = -\frac{a^3}{3} - \frac{3a^4}{4} + \frac{b^3}{3} + \frac{3b^4}{4}$$

`Integrate[Cos[x], {x, -Pi/4, Pi/4}]`

$$\text{Out[112]} = \sqrt{2}$$

`In[113]:= Integrate[1/(x^4 - 1), x]`

$$\text{Out[113]} = -\frac{\text{ArcTan}[x]}{2} + \frac{1}{4} \text{Log}[-1 + x] - \frac{1}{4} \text{Log}[1 + x]$$

`In[117]:= Integrate[1/(x^4 - 1), {x, 0, 1/2}]`

$$\text{Out[117]} = \frac{1}{2} (-\text{Arccot}[2] - \text{ArcCoth}[2]) \quad //N$$

$$\text{Out[118]} = -0.506477$$



4 Διαφορικές εξισώσεις

Η εντολή DSolve

DSolve[eqn,y,x] : λύνει τη διαφορική εξίσωση της συνάρτησης y με ανεξάρτητη μεταβλητή το x .

DSolve[{eqn₁,eqn₂,...},{y₁,y₂,...},x] : λύνει ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων

DSolve[eqn,y,{x₁,x₂,...}] : λύνει μια διαφορική εξίσωση με μερικούς παραγώγους

- Η DSolve δίνει λύσεις του τύπου $y[x]$ και όχι για τη συνάρτηση y .
- Συναρτήσεις μιας μεταβλητής
 - Η DSolve μπορεί να λύσει γραμμικές διαφορικές εξισώσεις οποιασδήποτε τάξης που έχουν σταθερούς συντελεστές.
 - Η DSolve μπορεί να λύσει γραμμικές εξισώσεις μέχρι 2^{ης} τάξης με μη σταθερούς συντελεστές.
 - Η DSolve περιλαμβάνει γενικές διαδικασίες που αντιμετωπίζουν πλήθος μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων των οποίων οι λύσεις δίνονται σε βιβλία αναφοράς (π.χ. Kamke).
- Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών
 - Η DSolve μπορεί να βρίσκει γενικές λύσεις διαφορικών εξισώσεων για γραμμικές και ψευδογραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Οι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους συνήθως δεν επιδέχονται γενικές λύσεις.

NDsolve: Αριθμητική λύση Διαφορικών Εξισώσεων με μέθοδο παρεμβολών



4 Διαφορικές εξισώσεις

Η εντολή DSolve

- Η DSolve μπορεί να λύσει συστήματα διαφορικών εξισώσεων που περιλαμβάνουν και αλγεβρικές εξισώσεις που δεν περιλαμβάνουν παραγώγους.
- Οι διαφορικές εξισώσεις πρέπει να συντάσσονται με μερικές παραγώγους ακόμη και σε συναρτήσεις μιας μεταβλητής δηλ. με τις συναρτήσεις $y'[x]$ ή D και όχι με τις ολικές παραγώγους Dt .

DSolve[y'[x]+y[x]==a Sin[x], y[x], x] $\{\{y[x] \rightarrow e^{-x} C[1] + 1/2 a (-\cos[x] + \sin[x])\}\}$ **DSolve[{y'[x]+y[x]==a Sin[x], y[0]==0}, y[x], x]** $\{\{y[x] \rightarrow -(1/2) a e^{-x} (-1 + e^x \cos[x] - e^x \sin[x])\}\}$ **DSolve[{y'[x]+y[x]==a Sin[x], y[0]==0}, y, x]** $\{\{y \rightarrow \text{Function}[\{x\}, -(1/2) a e^{-x} (-1 + e^x \cos[x] - e^x \sin[x])]\}\}$ **Simplify[y''[x]+y[x]^2/.%]** $\{1/4 a (a + a e^{-2x} + 2 e^{-x} + (-2 + 2 a e^{-x}) \sin[x] + \cos[x] (2 - 2 a e^{-x} - 2 a \sin[x]))\}$



4 | Διαφορικές εξισώσεις

Η εντολή DSolve

Σε κάποιες περιπτώσεις σε διαφορικές εξισώσεις υψηλότερης τάξης η λύση βρίσκεται με τη βοήθεια της αντικατάστασης όπου η διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε αλγεβρική.

Βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$y'' - 3y' + 2y = 0,$$

αντικαθιστώντας $y = e^{ax}$.

Πρώτα ορίζουμε την αντικατάσταση

$$y[x_] := \text{Exp}[\alpha x]$$

Με την αντικατάσταση αυτή του $y(x)$, η διαφορική εξίσωση γίνεται αλγεβρική εξίσωση με παράμετρο το α .

$$y''[x] - 3y'[x] + 2y[x]$$

Εξισώνοντας την παραπάνω παράσταση με το 0 απλοποιούνται οι εκθετικοί παράγοντες και έχουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση του α .

$$\text{Solve}[\% == 0, \alpha]$$

Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορετικής εξίσωσης είναι

$$y[x] /. \%$$

Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x) = c_1 \alpha x + c_2 \alpha^2 x.$$

$$\text{Clear}[y]$$



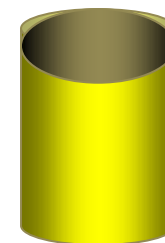
Εργασία 9 | Παραγωγίζοντας και Ολοκληρώνοντας
Για τις συναρτήσεις:

(α) $x e^{-x}$ (β) $x \ln x$ (γ) $\sin(e^x)$ (δ) $\tanh(x)$ (ε) $\frac{x \ln x}{1-x} + \ln(1-x)$
 (στ) $(1+1/x)^x$ (ζ) $(x^2+1) \ln x$ (η) $x^3 \ln x$ (θ) $\ln x / x^2$ (ι) $\sin^2(3x^2 + \pi/4)$

- Υπολογίστε μέχρι και τη δεύτερη παράγωγο και στη συνέχεια τις αντίστοιχες αριθμητικές τιμές για $x=2.2$
- Υπολογίστε αρχικά τα αόριστα ολοκληρώματα και στη συνέχεια τις τιμές των αντίστοιχων ορισμένων ολοκληρωμάτων για όρια ολοκλήρωσης από 1 έως 2.
- Βρείτε τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα του πολυωνύμου: $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$
 Η 1^η παράγωγος συνάρτησης μηδενίζεται σε τοπικό ακρότατο, ενώ αν η 2^η παράγωγος στο ίδιο σημείο είναι <0 τότε είναι μέγιστο ενώ αν είναι >0 ελάχιστο.
- Βρείτε την ακτίνα (r) και το ύψος (h) ενός κυλινδρικού δοχείου με όγκο 64 cm^3 και ελάχιστη επιφάνεια.

Οι τύποι που θα χρησιμοποιήσετε είναι: $V = \pi r^2 h \Rightarrow h = V / \pi r^2$, $S = \pi r^2 + 2\pi r h$. $S' = 0$,

Επιλέξτε τη λύση $r > 0$.

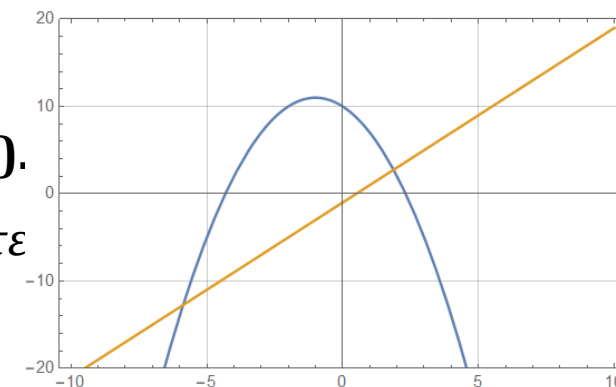




Εργασία 9 | Παραγωγίζοντας και Ολοκληρώνοντας

5. Βρείτε το εμβαδόν μεταξύ των καμπυλών $y = -x^2 - 2x + 10$ και $y = 2x - 1$ (y, x σε m).

Βρείτε τα σημεία τομής. Υπολογίστε το ορισμένο ολοκλήρωμα για κάθε μια και υπολογίστε τη διαφορά.



6. Το έργο μιας δύναμης δίνεται από τη σχέση $W = \int_{s_1}^{s_2} F ds$. Με τη βοήθεια αυτής της σχέσης να υπολογίσετε για $F = -Kx$, $F = -1/2 Kx^2$, $F = K\cos(x)$ και για x από -1 μέχρι 1 m και $K = 100$ N/m το έργο κάθε δύναμης και το συνολικό έργο σε J.



Εργασία 9 | Παραγωγίζοντας και Ολοκληρώνοντας

7. Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση: $y' - \frac{1}{x}y = x^a$. Ποια είναι η λύση για $a \neq 0$ και ποια για $a=0$;
8. Δείξτε ότι η λύση της εξίσωσης Bernoulli $y' = 2y/x + y^2$ είναι $y = (3x^2)/(c-x^3)$
 Βοήθεια: Υπολογίστε χωριστά το 1^ο και το 2^ο μέρος της εξίσωσης Bernoulli θέτοντας όπου y τη λύση και διαπιστώστε ότι είναι ίσα μεταξύ τους
9. Βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$, $y''(0)=3$ αντικαθιστώντας $y = e^{ax}$.
 Βοήθεια: $y[x_] := \text{Exp}[a x]$, $y'''[x] - 6y''[x] + 11y'[x] - 6y[x]$, $\text{Solve}[\% == 0, a]$
10. Βρείτε τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $y'' + 2a y' + a^2 y = 0$ με τις αρχικές συνθήκες $y[0]=1$ και $y'[1]=1$.
 Βοήθεια: $y[x_] := \text{Exp}[a x]$;
 $A = y''[x] + 2a y'[x] + a^2 y[x]$;
 $\text{Solve}[\{A == 0, y[0] == 1, y'[1] == 1\}, x]$



Εργασία 9 | Παραγωγίζοντας και Ολοκληρώνοντας

Πρόβλημα 11: Κλίση καμπύλης

Στο πρόβλημα αυτό καλείστε να διερευνήσετε την ορθότητα της σχέσης $Slope(t, \Delta t) = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ για τον

προσεγγιστικό υπολογισμό της κλίσης μιας συνάρτησης-καμπύλης $f(t)$.

Το όριο της συνάρτησης αυτής όταν $\Delta t \rightarrow 0$ μας δίνει την παράγωγο-κλίση της συνάρτησης αυτής.

Ο έλεγχος αυτός θα γίνει δοκιμάζοντας διάφορες τιμές στις μεταβλητές Δt , t και βλέποντας την επίδραση τους στην προσεγγιστικό υπολογισμό της κλίσης και συγκρίνοντας τις τιμές αυτές με τον απευθείας υπολογισμό της παραγώγου της συνάρτησης που αποτελεί και τον ακριβή τύπο υπολογισμού της κλίσης.

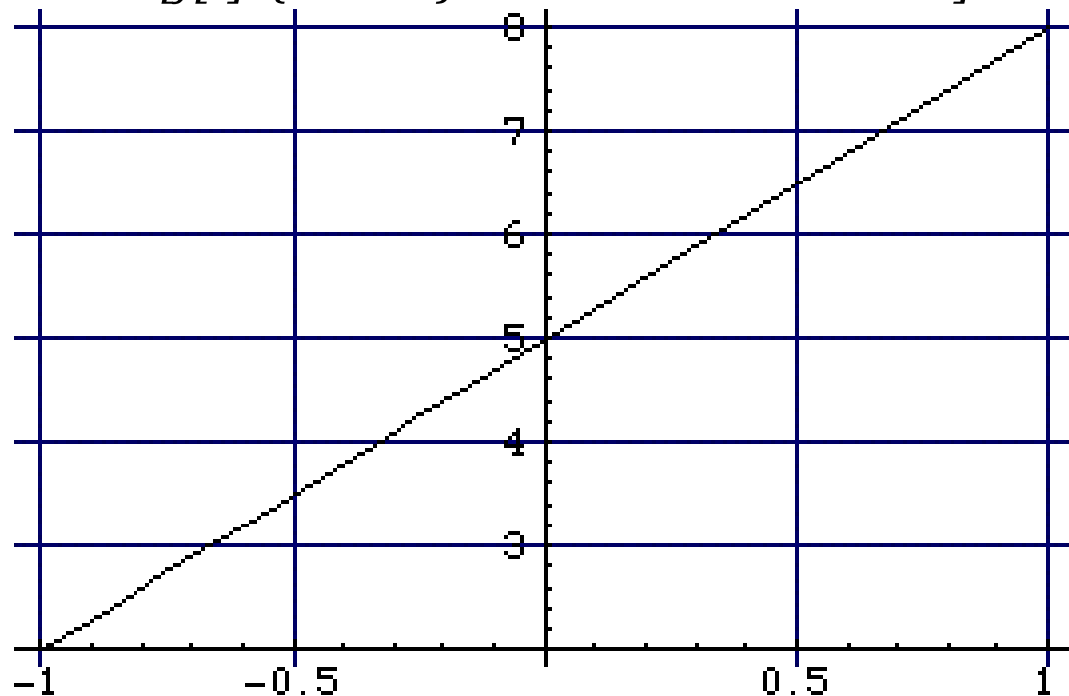


Εργασία 9 | Παραγωγίζοντας και Ολοκληρώνοντας

Πρόβλημα 11: Κλίση καμπύλης

$f[t_] := 3*t + 5$

`Plot[f[t], {t, -1, 1}, GridLines->Automatic]`

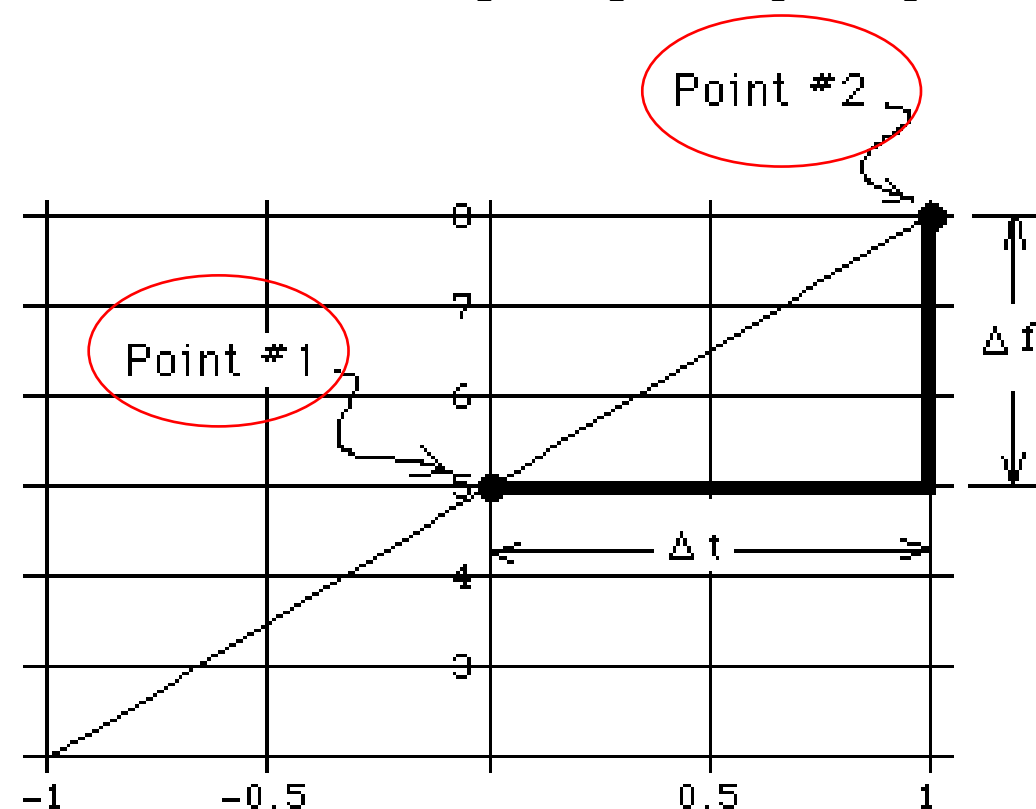


Η κλίση μιας ευθείας γραμμής δείχνει πόσο απότομη είναι η ευθεία σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα.

Μπορώ άραγε να χρησιμοποιήσω την ίδια σχέση και σε μια καμπύλη γραμμή;

Η κλίση της ευθείας $f(t)$ υπολογίζεται από τη σχέση $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ επιλέγοντας 2 οποιαδήποτε σημεία από

τη γραφική παράσταση της ευθείας π.χ. $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{8-5}{1-0} = 3$ αν πάρουμε τα σημεία 1 και 2: $f(t_2)=8$, $t_2=1$, $f(t_1)=5$, $t_1=0$.



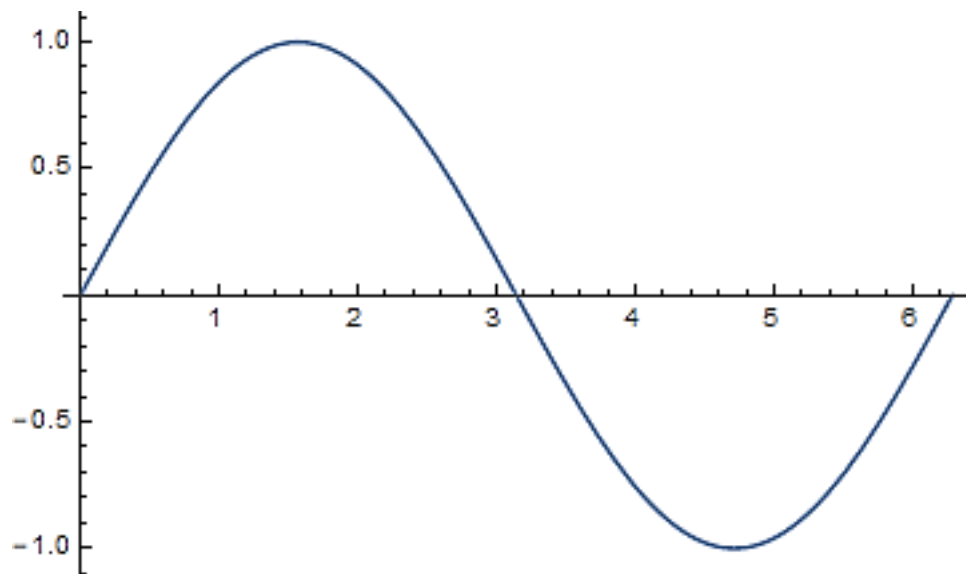


Εργασία 9 | Παραγωγίζοντας και Ολοκληρώνοντας

Πρόβλημα 11: Κλίση καμπύλης

$f[t_]:=Sin[t];$

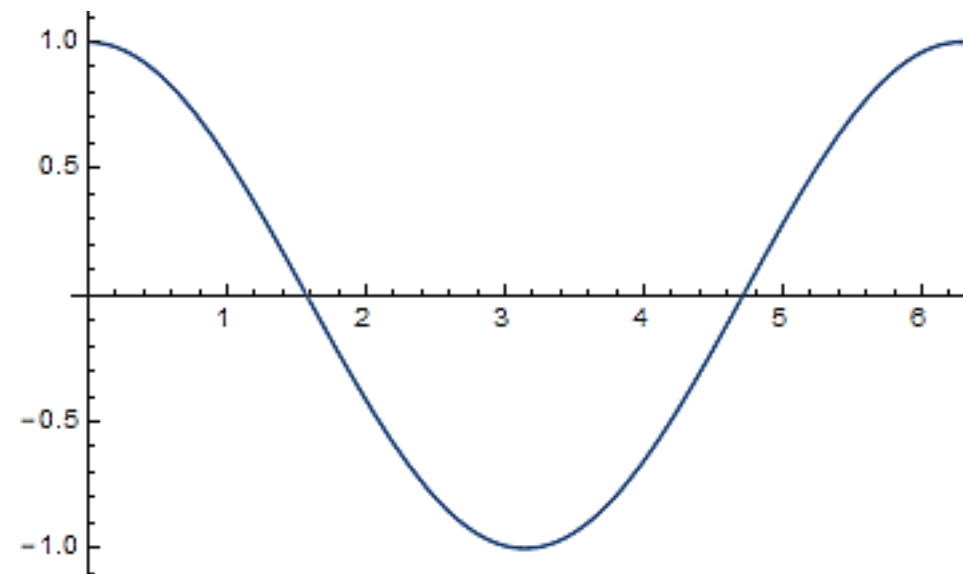
$Plot[f[t], \{t, 0, 2*Pi\}]$



$\Delta t=0.1;$

$Slope[t_]:= \frac{f[t + \Delta t] - f[t]}{\Delta t}$

$Plot[Slope[t], \{t, 0, 2\ pi\}]$



Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ της κλίσης καμπύλης συνάρτησης και της παραγώγου της;

Ποια συνάρτηση σας θυμίζει αυτή η καμπύλη;

Η καμπύλη αυτή θυμίζει το $Cos(t)$, όπως αναμένεται αν παραγωγίζαμε την συνάρτηση $Sin(t)$.



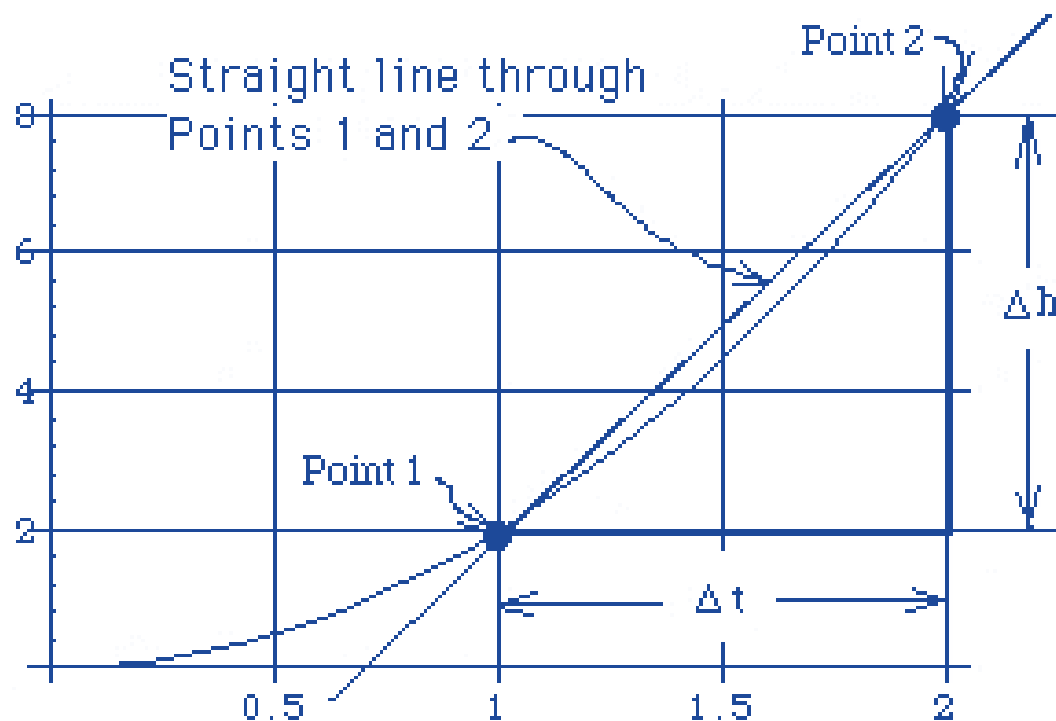
Εργασία 9 | Παραγωγίζοντας και Ολοκληρώνοντας

Πρόβλημα 11: Κλίση καμπύλης

Ο προσεγγιστικός υπολογισμός της κλίσης μπορεί να γίνει από τη σχέση $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ θεωρώντας

$t_2=t_1+\Delta t$, $t=t_1$. Ο υπολογισμός της κλίσης με τη Mathematica μπορεί να γίνει προσεγγιστικά θεωρώντας ένα

συγκεκριμένο βήμα Δt και μια συνάρτηση $Slope[t_]:= \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ με βάση τον παραπάνω τύπο.



Η σχέση αυτή μπορεί να θεωρηθεί μια προσεγγιστική σχέση για τον υπολογισμό της κλίσης, που ανάλογα με την τιμή του Δt δίνει σωστά ή όχι αποτελέσματα.

Η κλίση της καμπύλης μιας συνάρτησης ταυτίζεται με την παράγωγο της και ο ακριβής υπολογισμός της κλίσης

γίνεται από την σχέση $\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ όπου το Δt

τείνει στο 0.



Εργασία 9 | Παραγωγίζοντας και Ολοκληρώνοντας

Πρόβλημα 11: Κλίση καμπύλης

Στο πρόβλημα αυτό καλείστε να διερευνήσετε την ορθότητα της σχέσης $Slope(t, \Delta t) = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ για τον προσεγγιστικό υπολογισμό της κλίσης μιας συνάρτησης-καμπύλης $f(t)$.

Το όριο της συνάρτησης αυτής όταν $\Delta t \rightarrow 0$ μας δίνει την παράγωγο-κλίση της συνάρτησης αυτής.

Ο έλεγχος αυτός θα γίνει δοκιμάζοντας διάφορες τιμές στις μεταβλητές Δt , t και βλέποντας την επίδραση τους στην προσεγγιστικό υπολογισμό της κλίσης και συγκρίνοντας τις τιμές αυτές με τον απευθείας υπολογισμό της παραγώγου της συνάρτησης που αποτελεί και τον ακριβή τύπο υπολογισμού της κλίσης.

α). Υπολογίστε την κλίση της καμπύλης $g(t) = 2t^3$ στο σημείο $t = 1.0$ θεωρώντας το $\Delta t = 2, 1, 0.1, 0.01, 0.001$ με τη βοήθεια της προσεγγιστικής σχέσης. Με τη βοήθεια της ListPlot σχεδιάστε το διάγραμμα x, y όπου $x = \Delta t$ και $y = \text{κλίση}$. Τι συμβαίνει στην αριθμητική τιμή της κλίσης καθώς το Δt γίνεται ολοένα και μικρότερο; Δείξτε με την εντολή Show στο ίδιο διάγραμμα τις δύο καμπύλες μεταβολής της προσεγγιστικής κλίσης στο διάστημα $0 < t < 10$ για 2 ακραίες τιμές του $\Delta t = 10$ και $\Delta t = 0.001$. Τι παρατηρείτε από την σύγκριση των δύο καμπυλών; Τι αλλάζει αν το διάστημα υπολογισμού γίνει $0 < t < 100$;

β). Σχεδιάστε την κλίση της καμπύλης $h(t) = \text{Cos}(t)$ στο διάστημα $0 < t < 2\pi$ χρησιμοποιώντας $\Delta t = 0.05$. Επίσης σχεδιάστε την παράγωγο της παραπάνω συνάρτησης. Με την εντολή Show δείξτε στο ίδιο διάγραμμα τις δύο καμπύλες και να σχολιάσετε την συμφωνία των καμπυλών.

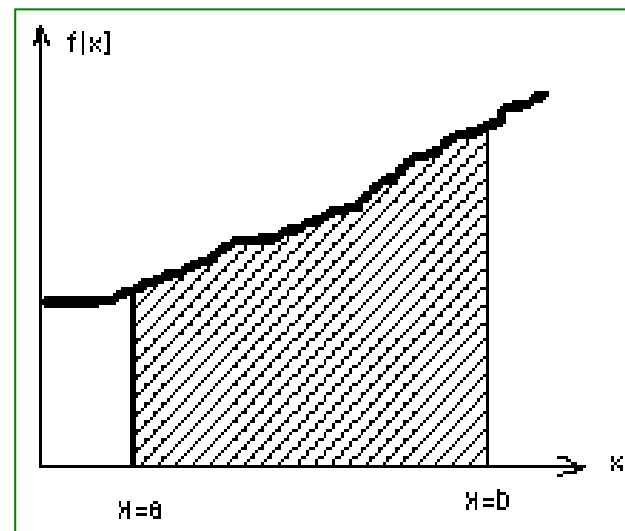


Εργασία 9 | Παραγωγίζοντας και Ολοκληρώνοντας

Πρόβλημα 12: Εμβαδό καμπύλης

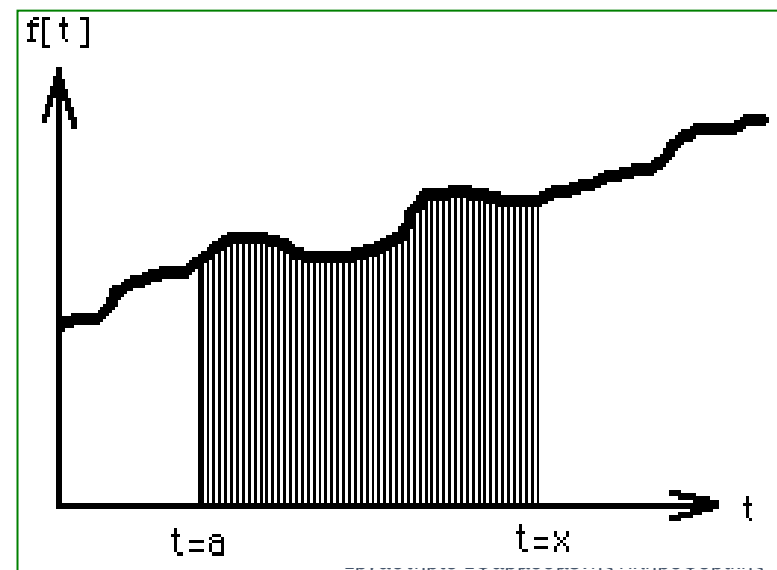
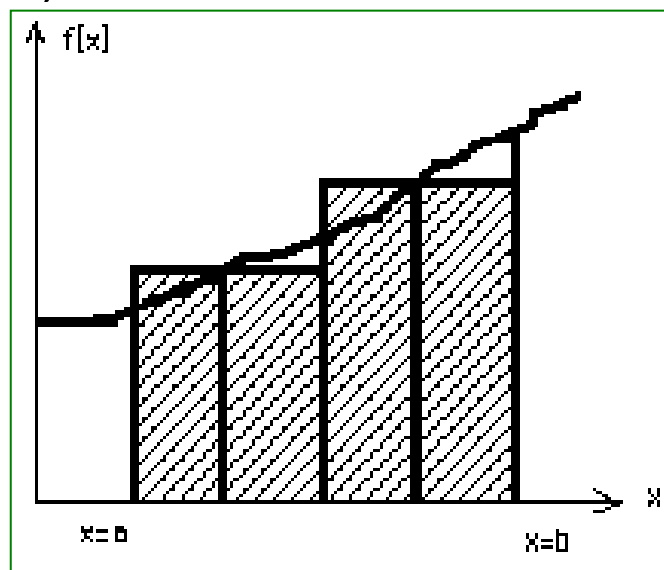
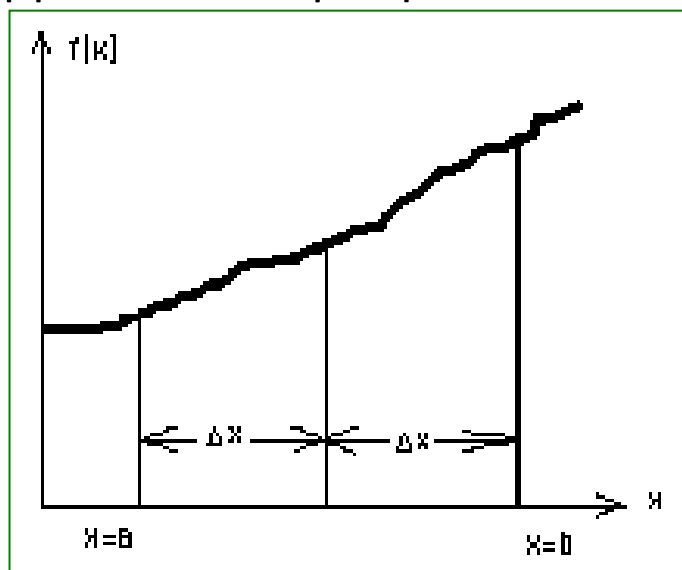
$$\text{Ολοκλήρωμα: } \int_a^b f(x) dx$$

Το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης αποτελεί στην ουσία το εμβαδόν που περικλείεται από την συνάρτηση αυτή, τον άξονα των x και δύο κατακόρυφους άξονες στις θέσεις $x=a$ και $x=b$.



Ένας πρακτικός τρόπος υπολογισμού του εμβαδού αυτού είναι η διαίρεση του διαστήματος $[a, b]$ σε μικρά ίσα διαστήματα και στη συνέχεια να θεωρήσουμε το εμβαδόν σαν το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που σχηματίζονται.

$$\Delta x = \frac{b - a}{N}$$





Εργασία 9 | Παραγωγίζοντας και Ολοκληρώνοντας

Πρόβλημα 12: Εμβαδό καμπύλης

Η ερώτηση που πηγάζει είναι γιατί να προσπαθώ να υπολογίσω αριθμητικά ολοκληρώματα από τη στιγμή που τελικά η *Mathematica* κάνει όλη τη δουλειά;

Πέρα από τον καθαρά εκπαιδευτικό χαρακτήρα της άσκησης υπάρχουν και προβλήματα όπου δίνονται πειραματικά αποτελέσματα και δεν είναι δυνατή η εύρεση της συνάρτησης $f(x)$, όποτε είμαστε αναγκασμένοι να καταφύγουμε σε αριθμητικές λύσεις.

Έχουμε λοιπόν το
ολοκλήρωμα της
συνάρτησης $f(x)=x^3$
από 0 ως 1

$$\int_0^1 x^3 dx$$

0.25

Και την αριθμητική του προσέγγιση

$$\int_a^b f[x] dx \approx \Delta x \sum_{n=0}^{N-1} f[a + n \Delta x]$$

Εύκολα μπορεί να δοκιμάσει κανείς και να δει ότι ανεβάζοντας τον αριθμό των βημάτων **Num**, η αριθμητική προσέγγιση για το ολοκλήρωμα πλησιάζει την τιμή 0.25, ολοένα και με αργότερο ρυθμό.

```
a = 0.; b = 1.; Num = 40.;
Δx = (b - a) / Num;
f[x_] := x^3;
Δx * Sum[f[a + n Δx], {n, 0, Num - 1}]
```

0.237656



Εργασία 9 | Παραγωγίζοντας και Ολοκληρώνοντας
Πρόβλημα 12: Εμβαδό καμπύλης

Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιήσει και μια διαφορετική προσέγγιση (μεσαίας τιμής)

$$\int_a^b f[x] \, dx \approx \Delta x \sum_{n=0}^{N-1} f[a + n \Delta x]$$

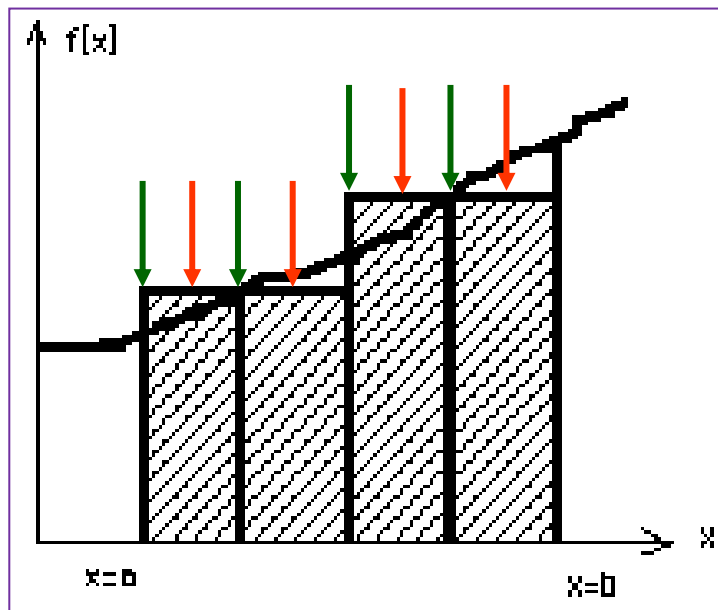
$$\int_a^b f[x] \, dx \approx \Delta x \sum_{n=0}^{N-1} f\left[a + \frac{\Delta x}{2} + n \Delta x\right]$$

`a = 0.; b = 1.; Num = 40.;`

`$\Delta x = \frac{b - a}{\text{Num}};$`

`$f[x_] := x^3;$`

$$\Delta x \sum_{n=0}^{\text{Num}-1} f[a + n \Delta x]$$



`a = 0.; b = 1.; Num = 40.;`

`$\Delta x = \frac{b - a}{\text{Num}};$`

`$f[x_] := x^3;$`

$$\Delta x \sum_{n=0}^{\text{Num}-1} f\left[a + \frac{\Delta x}{2} + n \Delta x\right]$$

0.237656

0.25

0.249922



Εργασία 9 | Παραγωγίζοντας και Ολοκληρώνοντας
Πρόβλημα 12: Εμβαδό καμπύλης

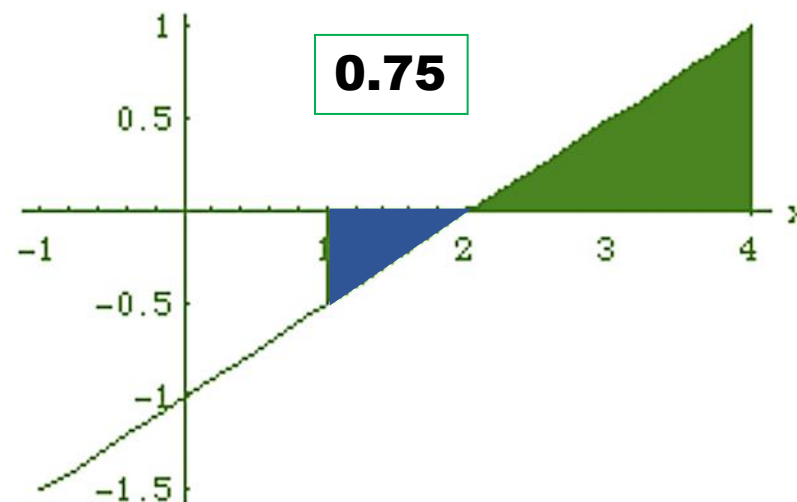
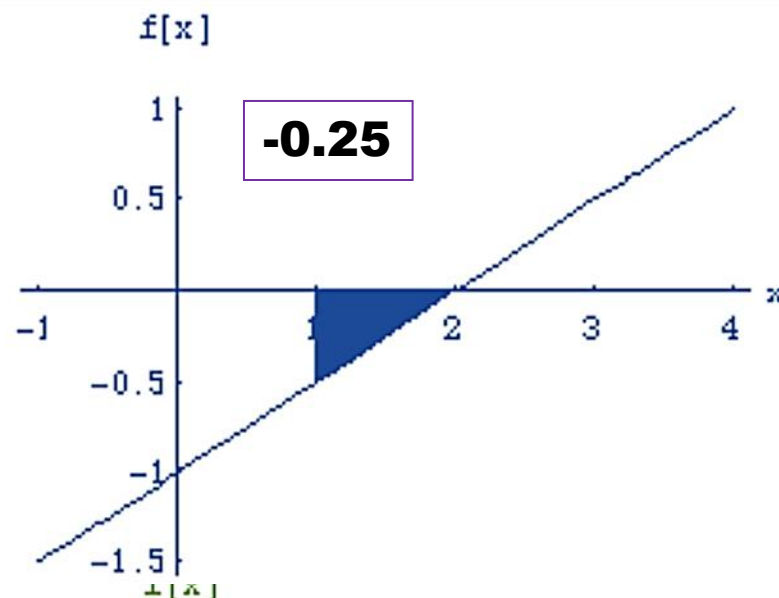
Τι γίνεται σε περιπτώσεις όπου έχουμε εμβαδόν κάτω από τον άξονα των x ;

```
a = 1.; b = 2.; Num = 40.;
```

```
Δx = (b - a) / Num;
```

```
f[x_] := 1/2 x - 1;
```

```
Δx ∑n=0Num-1 f[a + (Δx/2) + n Δx]
```



```
a = 1.; b = 4.; Num = 40.;
```

```
Δx = (b - a) / Num;
```

```
f[x_] := 1/2 x - 1;
```

```
Δx ∑n=0Num-1 f[a + (Δx/2) + n Δx]
```



Εργασία 9 | Παραγωγίζοντας και Ολοκληρώνοντας
Πρόβλημα 12: Εμβαδό καμπύλης

α). Υπολογίστε με τις δύο προσεγγιστικές μεθόδους το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $f(x)=x^4$ από $x=1$ ως $x=4$ θέτοντας τον αριθμό των βημάτων $N=40$.

Υπολογίστε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα.

Ποια από τις δύο προσεγγιστικές μεθόδους δίνει καλύτερο αποτέλεσμα;

β). Υπολογίστε με τη δεύτερη προσεγγιστική μέθοδο από $t=1$ ως $t=4$ (μεσαίας τιμής) το εμβαδόν της καμπύλης $g(t)=4t^3$ για $N=10-100$ με βήμα 5.

Σχεδιάστε τις καμπύλες στο ίδιο διάγραμμα xy όπου x το N και y το εμβαδόν.

Τι παρατηρείτε;

```
data2 = Table[{x, Emb2[x]}, {x, 10, 100, 5}]  
ListPlot[data2]
```